UTEC

UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA

MATEMÁTICAS I - SEMANA 6

Logro D2

Docentes:
Xyoby Chávez Pacheco
Sergio Quispe Rodríguez
Cristina Navarro Flores
Naudy López Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cordelia Khouri de Arciniegas

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

Pautas de la sesión:

- Tiempo aproximado 2 hora
- Silenciar su micrófono.
- Habilitar la cámara.
- Realizar preguntas por el chat.
- Indicar el momento de preguntas
- La grabación de la sesión se cargará a Canvas.

Logro D1

Aproximar funciones usando los diferenciales. $df=f'(x)dx$ y aplicar las reglas de la derivación para calcular derivada de funciones compuestas e implicitas usando la notación de Leibniz.

ALGUNAS NOTACIONES COMUNES DE LA DERIVADA

DE UNA FUNCIÓN

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

El símbolo D y d/dx se llaman operadores de la derivación

El símbolo dy/dx es la notación de Leibniz, que es lo mismo que $f'(x)$

La notación de Leibniz para un número específico

Se quiere indicar la derivada $f'(x)$, en la notación de Leibniz en un numero específico $x = a$, entonces se usa

$$f'(a) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

Definición:

Una función f es derivable en $x = a$ si $f'(a)\ existe$.

Es derivable en un intervalo si es derivable en cada punto del intervalo.

Derivadas de funciones polinomiales y exponenciales

Derivada de una función constante: $\frac{d}{dx}(c) = 0$

Regla de la potencia: $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ En particular $\frac{d}{dx}(x) = 1$

Regla del múltiplo constante: $\frac{d}{dx}[c\, f(x)] = c\,\frac{d}{dx} f(x)$, $c = cte$

Regla de la suma: $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}\, g(x)$

Derivada de la multiplicación: $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \left[\frac{d}{dx}f(x)\right]\, g(x) + f(x)\left[\frac{d}{dx}g(x)\right]$

Derivada del cociente: $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \left\{\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]g(x) - f(x)\left[\frac{d}{dx}g(x)\right]\right\}/g^2(x)$

Derivada de la función exponencial: $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$

en general $\frac{d}{dx}\left[e^{f(x)}\right] = \frac{d}{dx}[f(x)]\, e^{f(x)}$

Derivada de la función logaritmo: $\frac{d}{dx}Ln[f(x)] = \frac{\frac{d}{dx}(f(x))}{f(x)}$

en particular $\frac{d}{dx}[\mathrm{Ln}(x)] = \frac{1}{x}$

Derivada de las funciones trigonométricas:

$$\frac{d}{dx}[sen(x)] = \cos(x) \;; \quad \frac{d}{dx}[\cos(x)] = -sen(x); \; \frac{d}{dx}[\tan(x)] = sec^2(x)$$

$$\frac{d}{dx}[cot(x)] = -csc^2(x) \;; \quad \frac{d}{dx}[\sec(x)] = sec(x)\tan(x)\,;$$

$$\frac{d}{dx}[\csc(x)] = -\csc(x)\cot(x)$$

Derivadas de funciones compuestas y regla de la cadena

Dada la función compuesta $\mathrm{F(x)} = (fog)(x) = f(g(x))$ es derivable si f es derivable en $g(x)$ y g es derivable en x.

Luego su derivada es: $F'(x) = f'\big(g(x)\big).g'(x)$

Usando diferenciales: $Sea\; u = g(x) \quad entonces$

$$\frac{d}{dx}F = \left(\frac{d}{du}f\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$$

Ejercicio 01:

Encuentre $F'(t)$ si $F(t) = 2sen(3\cos(4t))$

Solución

Hacemos: $v = 4t$ $u = 3\cos(v)$ entonces $F = 2sen\,u$

Usando la regla de la cadena $\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{du}\ \frac{du}{dv}\ \frac{dv}{dt}$

$$\frac{dF}{dt} = (2\cos u)\,(-3\ sen\ v)\,(4)$$

$$\frac{dF}{dt} = -24\cos u\ \ sen\ v$$

Usando las relaciones anteriores: $\frac{dF}{dt} = -24\cos(3\cos(4t))\ \ sen\ (4t)$

Ejercicio 02:

a) Encuentre $F'(x)$ si $F(x) = (x^4 - 3x^2 - 2)^5$

b) Encuentre $F'(x)$ si $F(x) = xe^{-kx}$

Solución (a)

Haciendo: $u = x^4 - 3x^2 - 2$

Quedando $\mathrm{F} = u^5$

Entonces por la regla de la cadena $\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{du}\,\frac{du}{dx}$

$$\frac{dF}{dx} = (5u^4)(4x^3 - 6x)$$

Así $\frac{dF}{dx} = 5(x^4 - 3x^2 - 2)^4(4x^3 - 6x)$

Solución (b)

Por la derivada del producto:

$$\frac{dF}{dx} = \left[\frac{dx}{dx}\right]\{e^{-kx}\} + \{x\}\left[\frac{d\{e^{-kx}\}}{dx}\right]$$

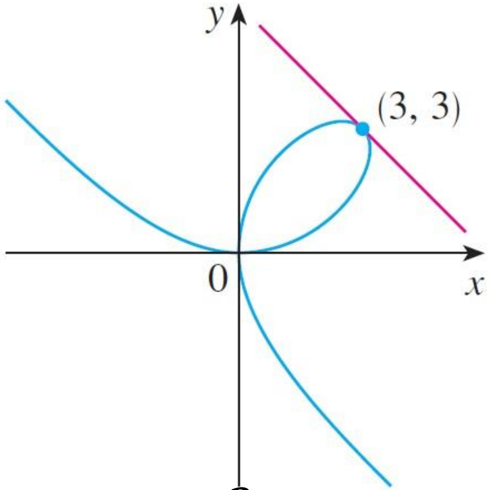
$$\frac{dF}{dx} = 1\,\{e^{-kx}\} + x\,[-k\,e^{-kx}]$$

$$\frac{dF}{dx} = e^{-kx} \; - kx\,e^{-kx}$$

Ejercicio 03:

a) Encuentre y' si $x^3 + y^3 = 6xy$

b) Halle la recta tangente en el punto (3;3)



Solución (a)

Usando diferenciales : $d[x^3 + y^3] = d[6xy]$

Entonces $d[x^3] + d[y^3] = 6\{y\,dx + xdy\}$

$$3x^2dx + 3y^2dy = 6\{ydx + xdy\}$$

$$x^2dx + y^2dy = 2ydx + 2xdy$$

agrupando: $(x^2 - 2y)dx = (2x - y^2)dy$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 2y}{2x - y^2}$$

Evaluando: $m = y'(3;3) = -1$

Solución (b)

Recta L: $\frac{y-3}{x-3} = -1$

Recta L: $y = -x + 6$

Ejercicio 04:

Se infla un globo esférico y su volumen crece a una razón de 100 cm^3/s ¿Qué tan rápido aumenta el radio del globo cuando el diámetro es de 50cm?

Solución

Datos: $\frac{dV}{dt} = 100cm^3/s$ queremos $\frac{dR}{dt} = ?$

Sabemos: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Diferenciando: $dV = \frac{4}{3}\pi(3R^2\, dR)$

entonces $dV = 4\pi\, R^2\, dR$

Dividiendo ambos lados por dt

Se tiene: $\frac{dV}{dt} = 4\pi\, R^2\, \frac{dR}{dt}$

Reemplazando el dato:

$$100 = 4\pi\left(25^2\, \frac{dR}{dt}\right)$$

Respuesta: $\frac{dR}{dt} = \frac{1}{25\pi} cm/s$

www.utec.edu.pe

www.ce2a.utec.edu.pe