UTEC

UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA

MATEMÁTICAS I - SEMANA 10

Docentes:
Xyoby Chávez Pacheco
Sergio Quispe Rodríguez
Cristina Navarro Flores
Naudy López Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cordelia Khouri de Arciniegas

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

Logro R2

Relacionar el cálculo de área de rectángulos como producto de magnitudes con interpretaciones físicas y reconocer la necesidad de determinar el área bajo una función. Estimar el área bajo una curva mediante la división en rectángulos y sumas de Riemann.

Repaso

$$\frac{P(x)}{x(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-a)} + \frac{C}{(x-b)}$$

Resolver la siguiente integral:: $\int \frac{1}{x^2+x-2}dx$

Solución:

1. El denominador Q(x) se descompone en productos de factores lineales

2. La función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en la suma de fracciones parciales.

3. Se determinan los valores de las constantes A y B del numerador de las fracciones parciales, haciendo uso de la relación de igualdad entre polinomios.

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+2)}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{Ax+2A+Bx-B}{(x-1)(x+2)} = \frac{(A+B)x+2A-B}{(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{(A+B)x+2A-B}{(x-1)(x+2)}$$

$$0x+1 = (A+B)x + 2A - B$$

$$A + B = 0 \Rightarrow A = -B$$
$$2A - B = 1 \Rightarrow 2(-B) - B = 1$$
$$\Rightarrow -3B = 1$$
$$\Rightarrow \quad B = -1/3$$
$$\Rightarrow \quad A = 1/3$$

Ejemplo: $\int \frac{1}{x^2+x-2} dx$

Solución

4. Se integra cada una de las fracciones parciales.

$$\int \frac{1}{x^2+x-2} dx = \int \frac{\boldsymbol{A}}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})} dx + \int \frac{\boldsymbol{B}}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})} dx$$

$$\int \frac{1/3}{(x-1)} dx + \int \frac{-1/3}{(x+2)} dx$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{(x-1)} dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x+2)} dx$$

$$\frac{1}{3} Ln|x-1| - \frac{1}{3} Ln|x+2| + C$$

Por lo tanto $\boxed{\int \frac{1}{x^2+x-2} dx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \mathbf{Ln} \frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{x+2}} + \mathbf{C}}$

Suma de Riemann

Sea y=f(x) continua definida en [a,b]

- Dividimos este intervalo en n subintervalos, con:

  -longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

  -$x_i = a + i\Delta x, i = 0, \ldots$

- Elegimos un punto x_i^* *de cada intervalo*

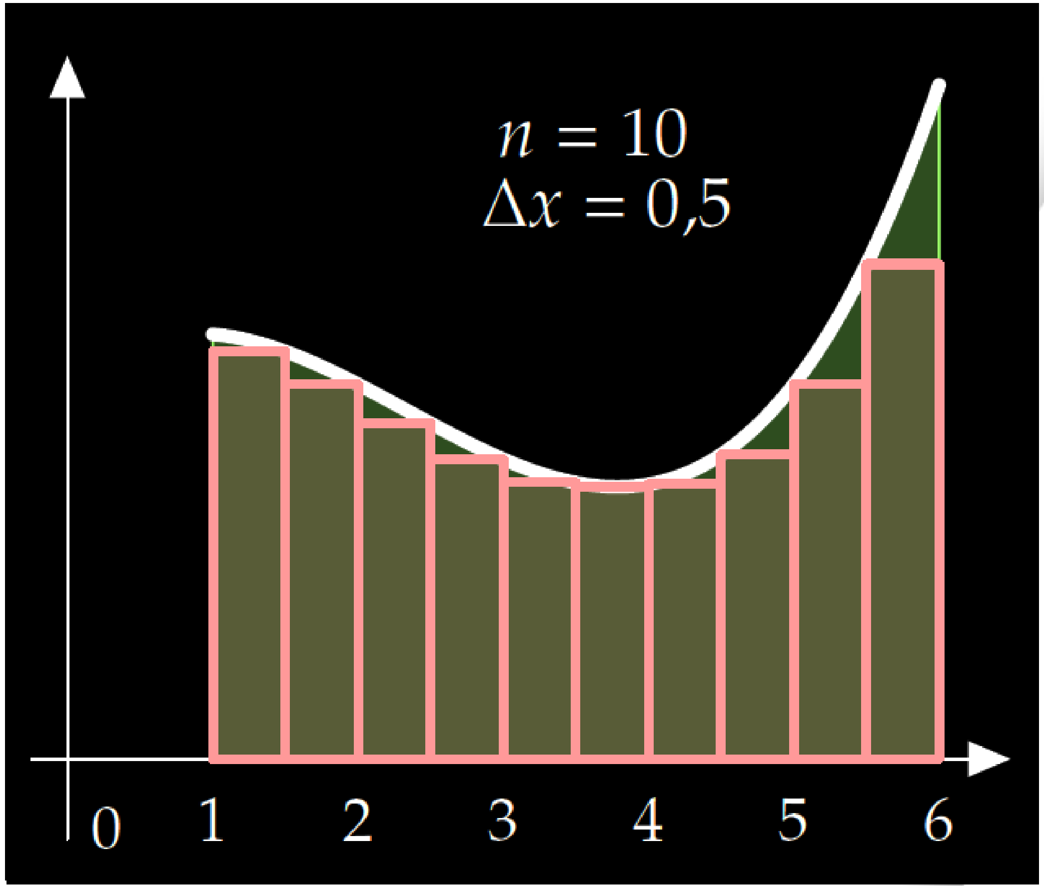
  $$I_i = [x_{i-1}, x_i]$$

- Evaluamos el área de i-ésimo rectángulo:

  $$f(x_i^*)\Delta x$$

- Sumamos todas las áreas $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$

- Tomamos el límite cuando n → ∞: $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$

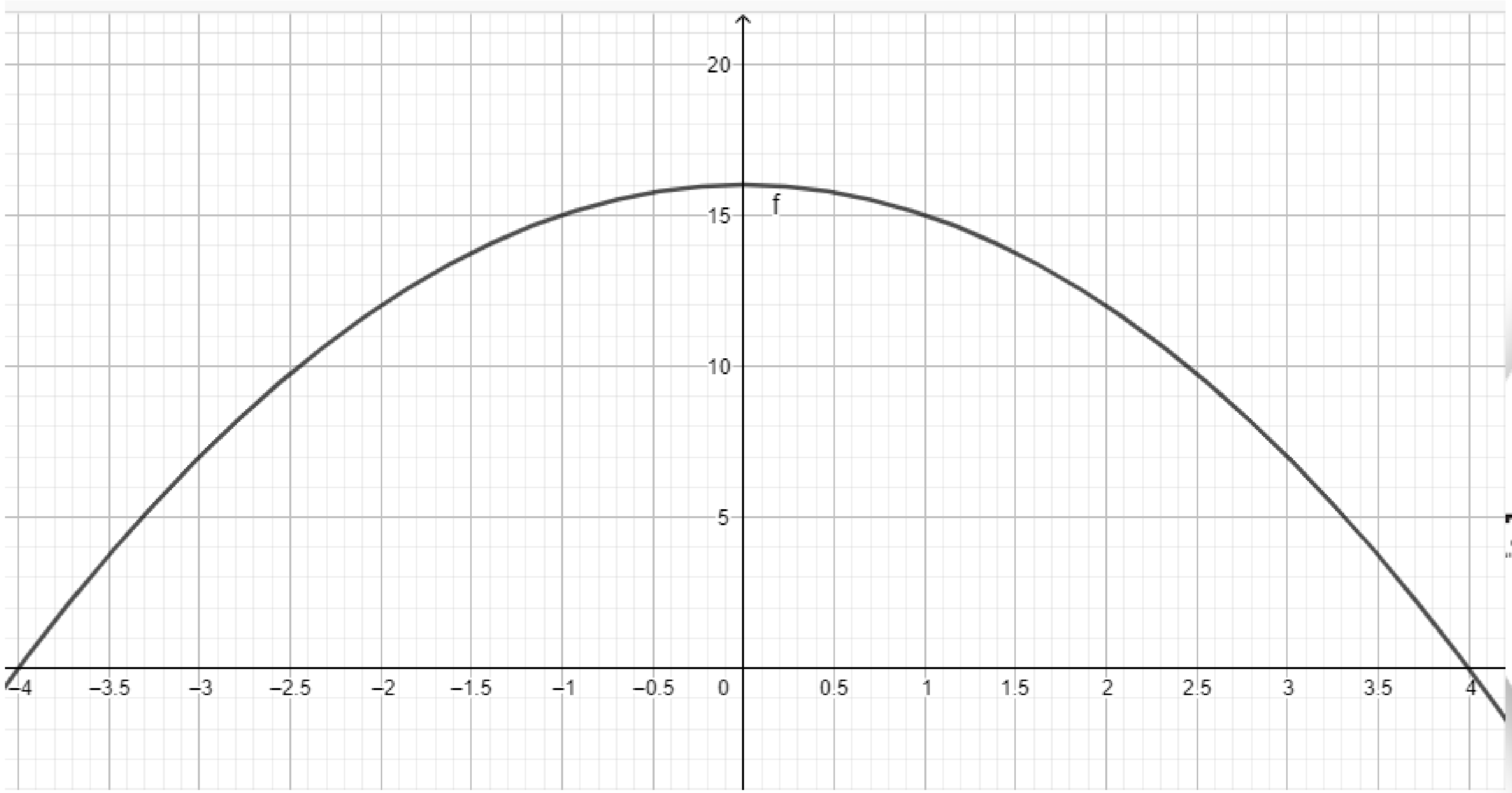


Ejercicio 01

Los datos mostrados en la gráfica corresponden a la tabla y está definida en el intervalo $[-3; 3]$

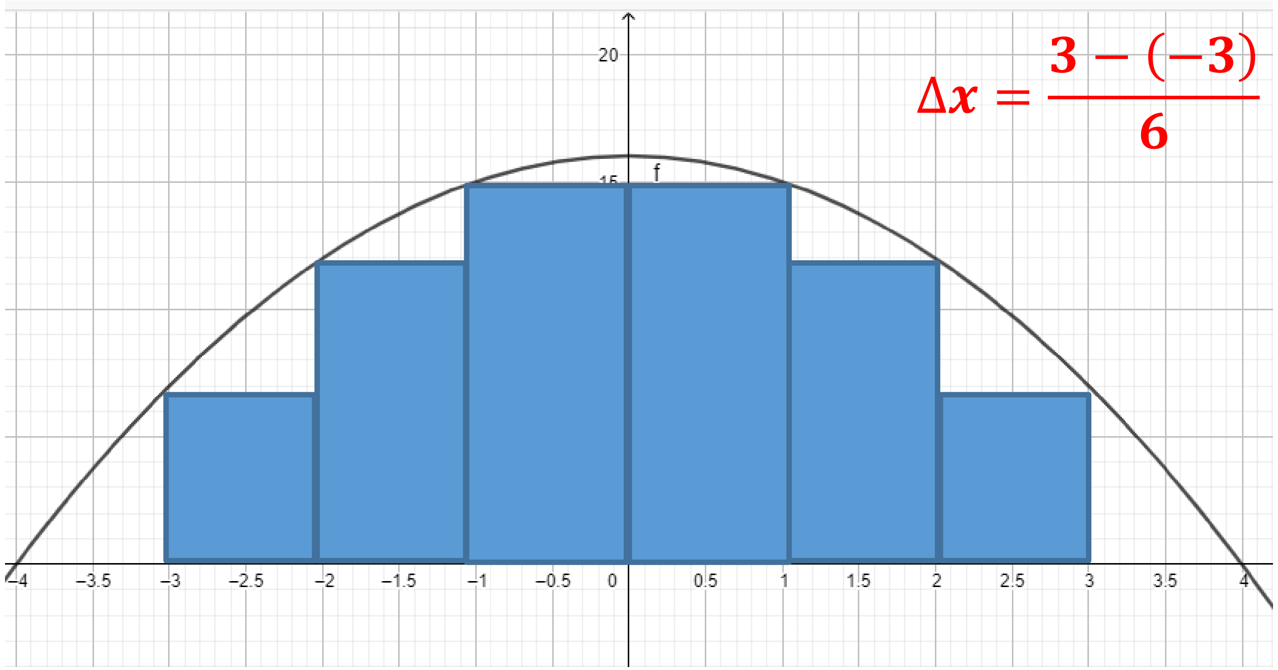
a) Utiliza sumas inferiores, y superiores para aproximar el área bajo la curva.

x	$y = 16 - x^2$
0	16
0,6	15,64
0,8	15,36
1,2	14,56
1,5	13,75
2,1	11,59
2,5	9,75
3	7



Solucionario 01

a) Utiliza sumas inferiores



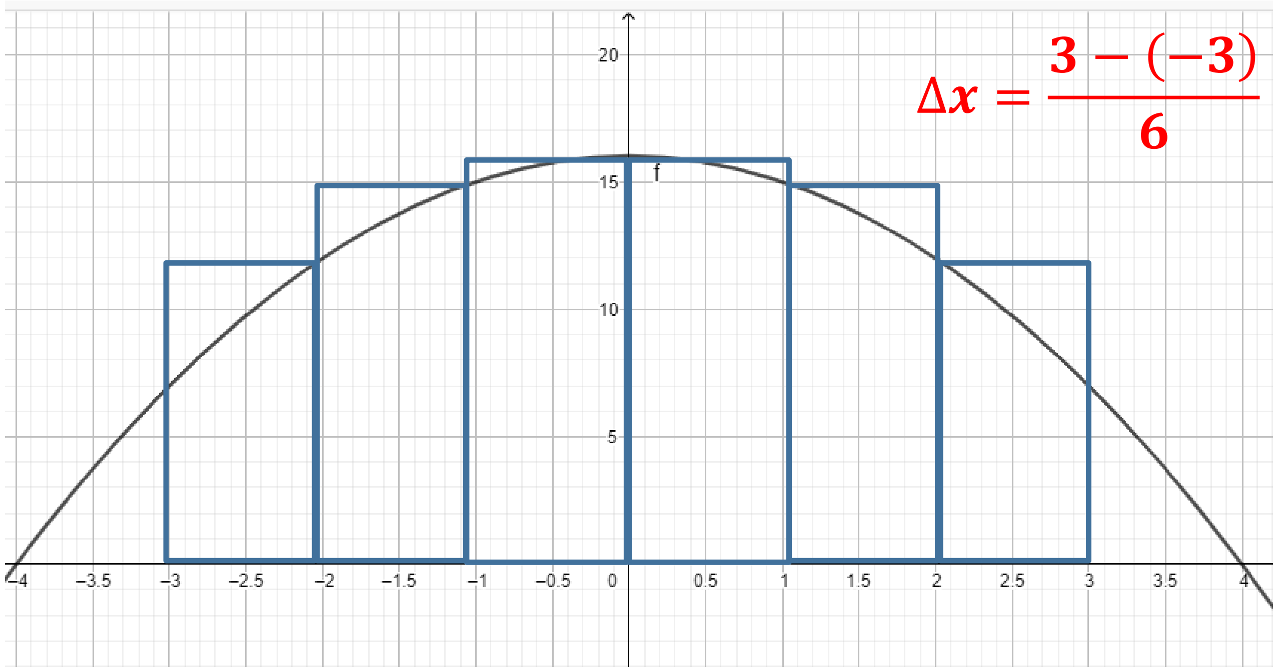
$$\Delta x = \frac{3-(-3)}{6} = 1$$

x	$y = 16 - x^2$
0	16
0,6	15,64
0,8	15,36
1,2	14,56
1,5	13,75
2,1	11,59
2,5	9,75
3	7

$\sum_{i=1}^{6} y(x_i^*)\Delta x = (7)1 + (12) * 1 +$**(15)*1+**$(7)1 + (12) * 1 +$**(15)*1=68**

Solucionario 01

A) Utiliza sumas superiores



$$\Delta x = \frac{3-(-3)}{6} = 1$$

x	$y = 16 - x^2$
0	16
0,6	15,64
0,8	15,36
1,2	14,56
1,5	13,75
2,1	11,59
2,5	9,75
3	7

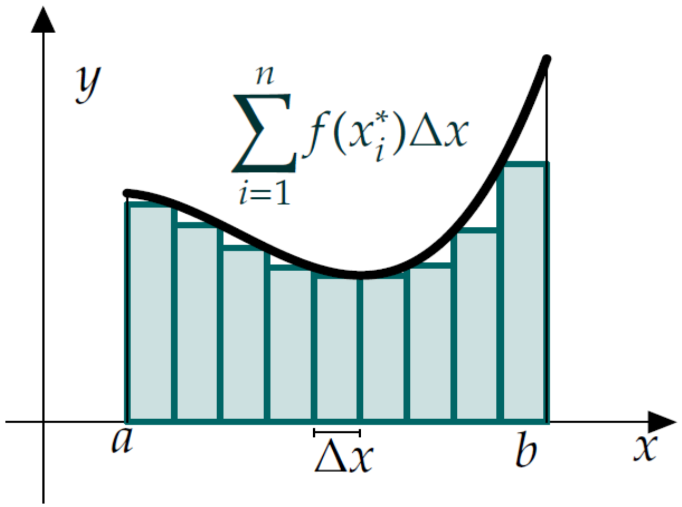
$\sum_{i=1}^{6} y(x_i^*)\Delta x = (\mathbf{12})\mathbf{1} + (\mathbf{15}) * \mathbf{1}$ +(16)*1+$(\mathbf{16})\mathbf{1} + (\mathbf{15}) * \mathbf{1}$ +(12)*1=86

Integral Definida

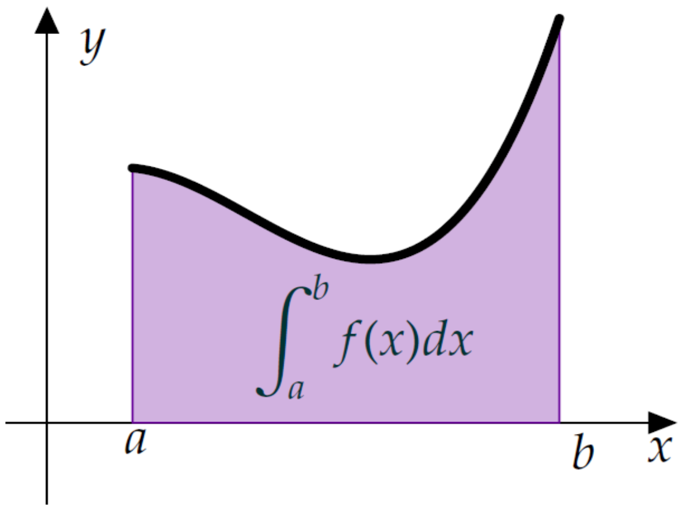
Definición

Este límite, si existe, es llamado **integral definida** de $f(x)$ sobre $[a,b]$ y escribimos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

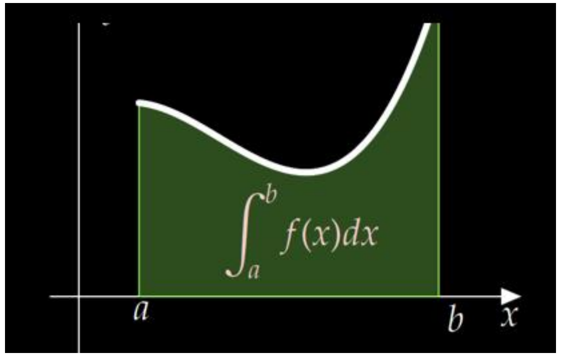


Si $f(x) \geq 0$, la **Suma de Riemann** $\sum f(x_i^*)\Delta x$ es la suma de las áreas de los rectángulos.



Si $f(x) \geq 0$, la **integral definida** $\int_a^b f(x)dx$ es el área bajo la curva $y = f(x)$ de a a b.

Teorema Fundamental del Cálculo:



Teorema . *Supongamos que* f *es una función continua sobre* $[a, b]$, *entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

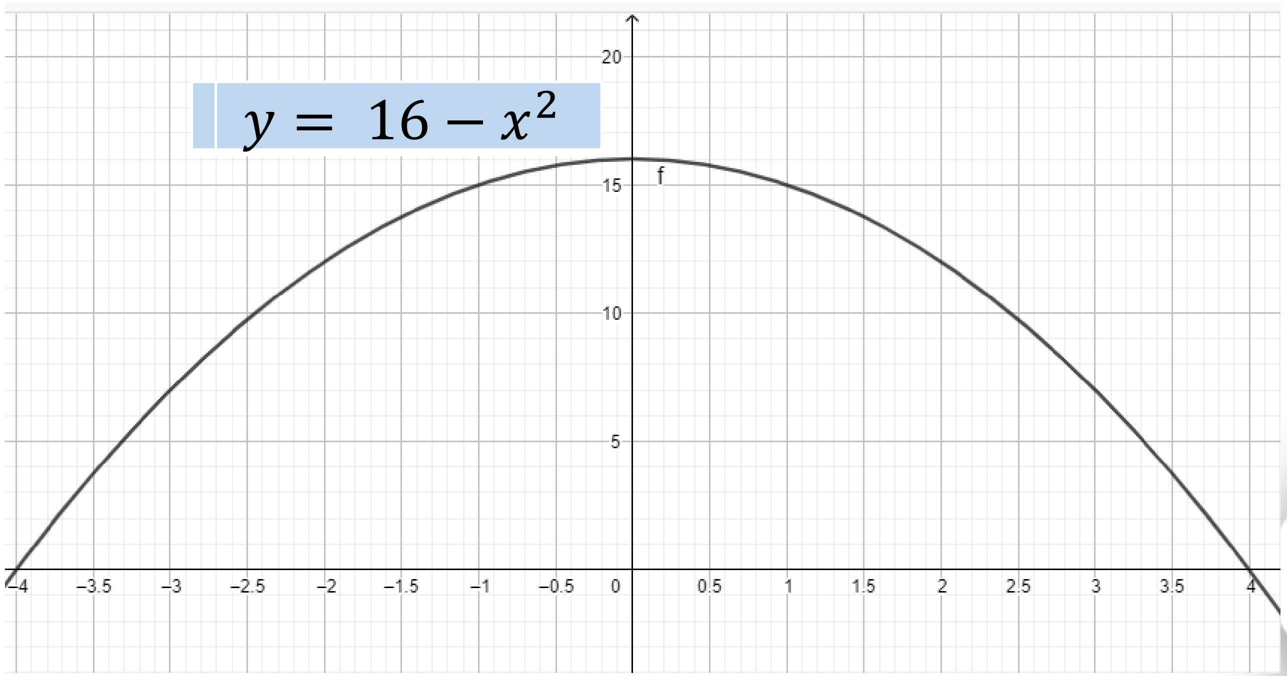
donde F *es cualquier antiderivada de* f,

es decir, $F' = f$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = F(b) - F(a)$$

Del ejercicio 01

b) Teniendo el valor de la suma superior y de la inferior, ¿cuál será una mejor aproximación para el área?



Sumatoria inferior:68$\boldsymbol{u^2}$

Sumatoria superior:86 $\boldsymbol{u^2}$

$$\int_{-3}^{3}(16 - x^2)\text{dx} = 16x - \frac{x^3}{3}$$

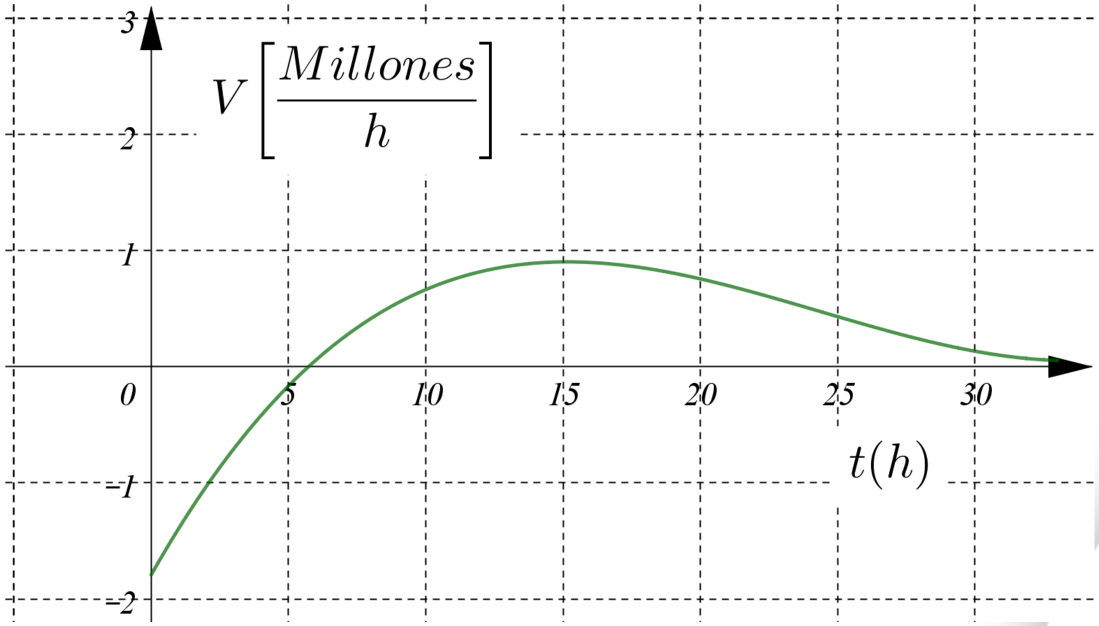
$$= 16(3) - \frac{3^3}{3} - \left(16(-3) - \frac{(-3)^3}{3}\right)$$

$$= 48 - 9 - (-48 + 9) = \boldsymbol{78u^2}$$

La mejor aproximación para el área bajo la curva será la sumatoria superior.

Pregunta 1 (9 puntos)

Una población de bacterias se inicia con 10 millones de individuos y su tasa de crecimiento en el tiempo t, medido en millones de individuos por hora, es representado por la función V=V(t) y modelado gráficamente por la figura de la derecha. (Observación: entiéndase que la tasa de crecimiento puede ser negativa, en tal caso la población decrece)



A. (2 Puntos) ¿Qué interpretación le asigna a la expresión V(t) dt y qué unidades posee?

B. (3 Puntos) Esboce la gráfica de $W(s)=\int_0^S V(t)\,dt$ indicando claramente los intervalos en donde crece, decrece y donde tiene un mínimo. ¿Qué representa W(s)?

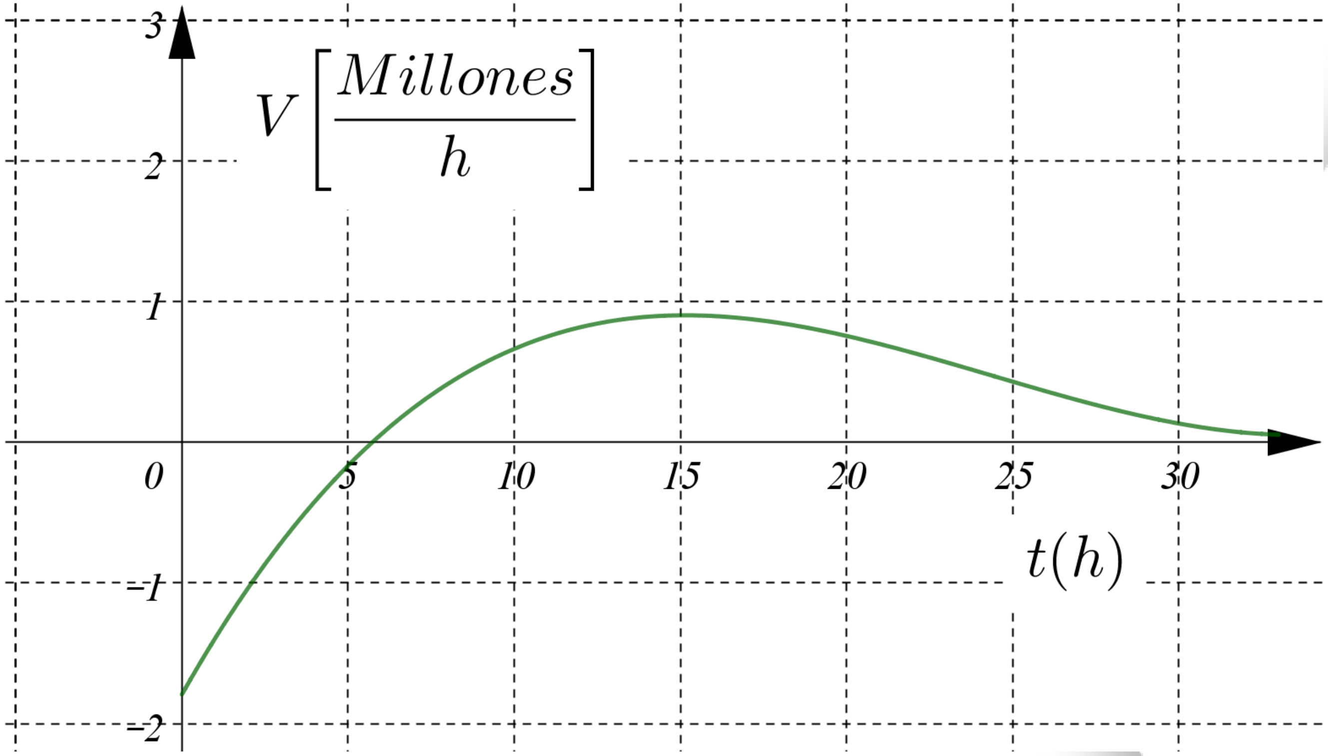
C. (3 Puntos) Use la suma de Riemman con la regla del punto medio para estimar el valor de la integral $\int_0^{30} V(t)dt$ tomando 6 intervalos.

D. (1 Punto) Estime la población de bacterias al cabo de 30 horas.

Pregunta 1 (9 puntos)

Solucionario A. ¿Qué interpretación le asigna a la expresión V(t) dt y qué unidades posee?

- Esta expresión V(t) es interpretada según el gráfico como la tasa de crecimiento.
- $V(t)\,dt = (\frac{millones}{hora})(horas) =$ Millones
- Por lo tanto V(t) dt representaría la variación de la población en un instante dado (dP).



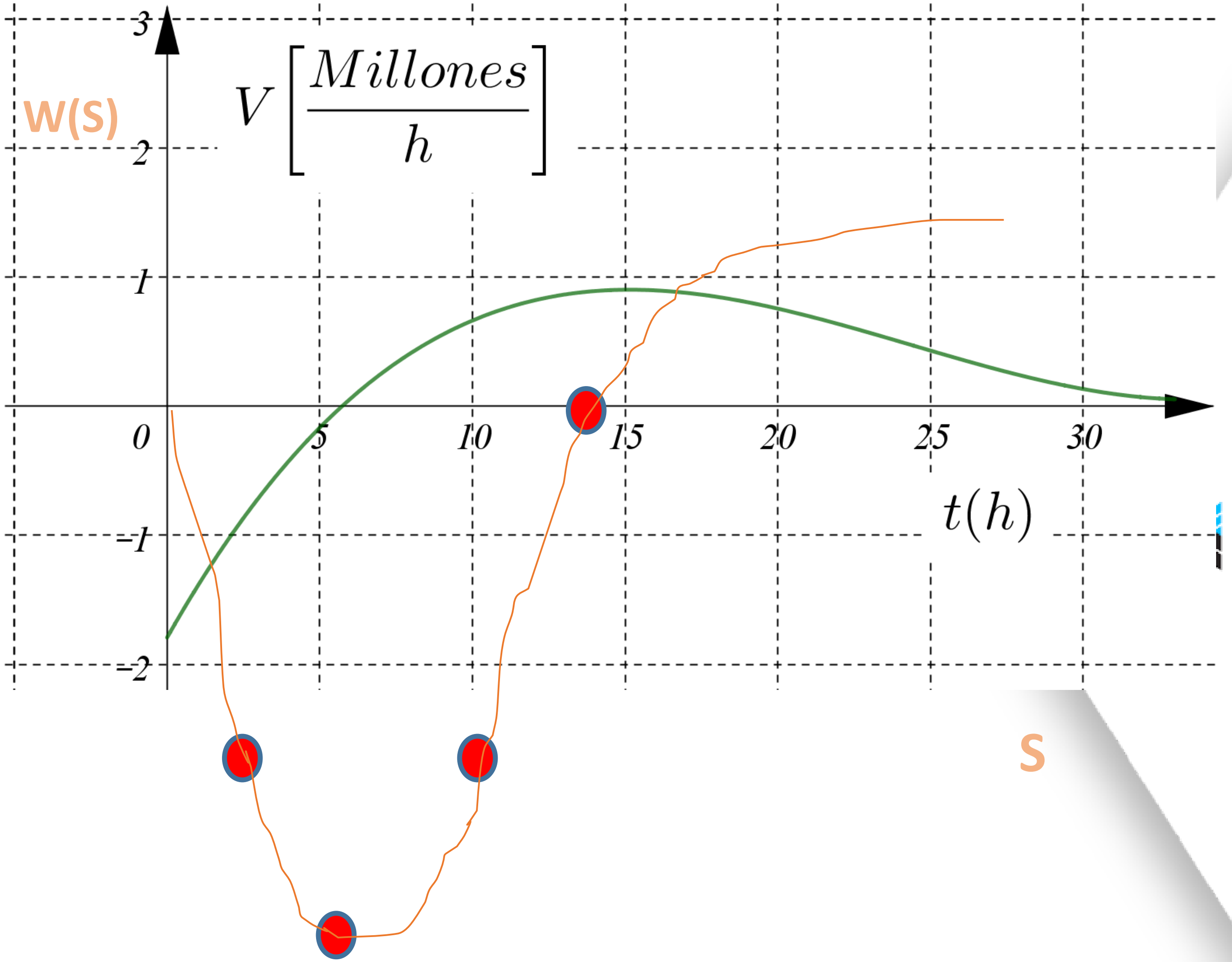
Pregunta 1 (9 puntos)

Solucionario B. Esboce la gráfica de $W(s)=\int_0^S V(t)dt$ indicando claramente los intervalos en donde crece decrece y donde tiene un mínimo. ¿Qué representa W(s)?

$$W(s)=\int_0^S V(t)dt = \int_0^S dP$$

$\int_0^S dP$: *representa* la suma variación de la población en un tiempo 0 a un tiempo S

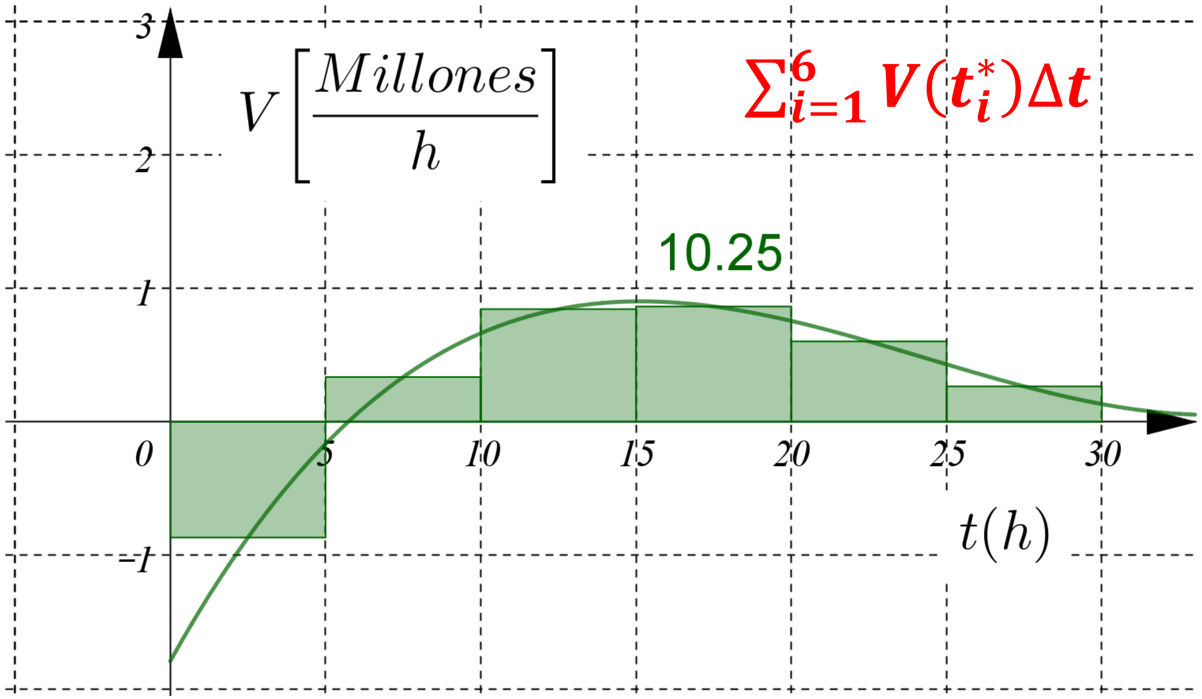
S	W(s)
O	$\int_0^0 V(t)dt = 0$
2.5	$\int_0^{2,5} V(t)dt = -3$
5	$\int_0^5 V(t)dt = -5$
10	$\int_0^{10} V(t)dt = -3$
14	$\int_0^{14} V(t)dt = 0$



Pregunta 1 (9 puntos)

Solucionario C) Use la suma de Riemman con la regla del punto medio para estimar el valor de la integral $\int_0^{30} V(t)dt$ tomando 6 intervalos.

$W(30)=\int_0^{30} V(t)dt$



$= V(2,5)5 + V(7,5)5 + V(12,5)5 + V(17,5)5 + V(22,5)5 + V(27.5)5$

$= 5(V(2,5) + V(7,5) + V(12,5) + V(17,5) + V(22,5) + V(27.5))$

$=5(-0,75 + 0.4 + 0,8 + 0,7 + 0,5 + 0,3) = 9,75$

Solucionario D) Estime la población de bacterias al cabo de 30 horas.

$P(30)=P_0 + W(30)$

P(30)=10+9,75=19,75

www.utec.edu.pe

www.ce2a.utec.edu.pe