UTEC

UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA

MATEMÁTICAS I - SEMANA 11

Docentes:
Xyoby Chávez Pacheco
Sergio Quispe Rodríguez
Cristina Navarro Flores
Naudy López Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cordelia Khouri de Arciniegas

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

Logro R3

Aplicar los teoremas del cálculo (TFC1,TFC2,TCN) .

Aplica los teoremas del cálculo y resuelve integrales indefinidas usando el método de sustitución

Al finalizar el alumno aplicará correctamente el primer y segundo teorema del cálculo así como el teorema del cambio neto a problemas de contexto.

Al finalizar el alumno aplicará el método de sustitución para calcular integrales y aplicarlas en contexto.

Propiedades de la integral definida

$Si\ f\ y\ g\ son\ integrables\ sobre\ [a,b], entonces:$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

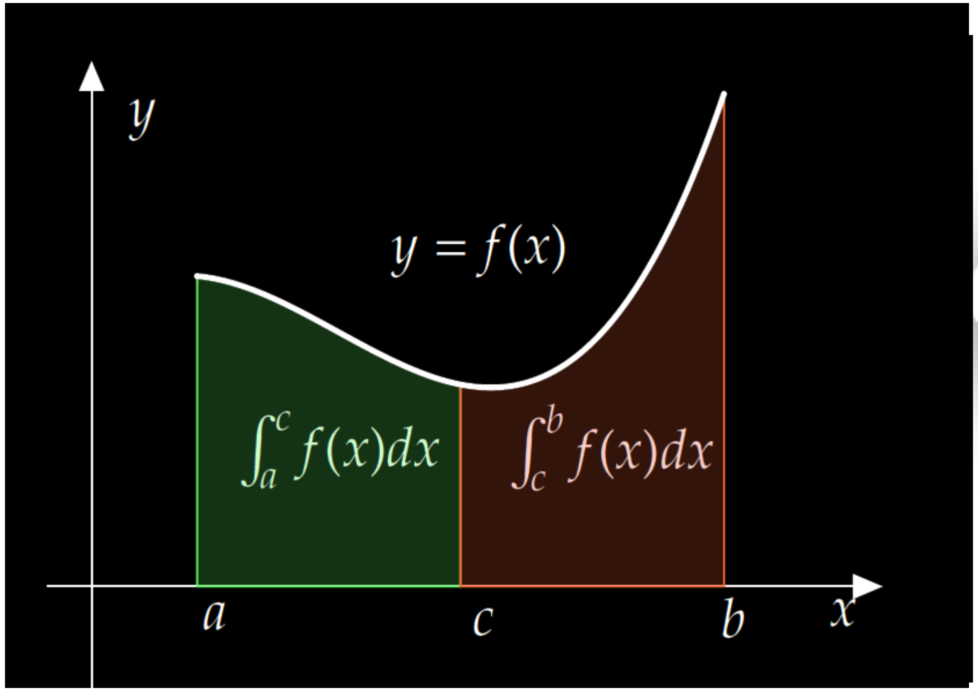
$$\int_a^b c\ dx = c(b-a) \quad c: constante$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b c\ f(x)\ dx = c\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$Si\ f(x) \geq 0, para\ a \leq x \leq b\ entonces\ \int_a^a f(x)dx \geq 0$$



Teorema

Supongamos que f es una función continua sobre $[a, b]$, entonces

1 Si $A(t) = \int_a^t f(x)dx$, entonces

$$A'(t) = \frac{d}{dt}\int_a^t f(x)dx = f(t)$$

Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema

Supongamos que f es una función continua sobre $[a, b]$, entonces

1. Si $A(t) = \int_a^t f(x)dx$, entonces $A'(t) = \frac{d}{dt}\int_a^t f(x)dx = f(t)$
2. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, donde F es cualquier antiderivada de f, es decir, $F' = f$.

Ejemplo 1:

Determine $g'(t)$ para $g(t) = \int_0^t \sqrt{1+x^2}\,dx$

Solución:

Por el teorema anterior

$$g'(x) = \frac{d}{dt}\int_0^t \sqrt{1+x^2}dx \;= \sqrt{1+t^2}$$

Ejemplo 2:

Determine $g'(t)$ para $g(t) = \int_0^{2t^3} \sqrt{1+x^2}\,dx$

Solución:

Haciendo $u = 2t^3$

Luego

$$g'(t) = \left(\frac{dg}{du}\right)\left(\frac{du}{dt}\right) = \left(\frac{d}{du}\int_0^u \sqrt{1+x^2}dx\right)(6t^2) = \left(\sqrt{1+u^2}\right)(6t^2)$$

$$= \left(\sqrt{1+(2t^3)^2}\right)(6t^2)$$

Ejemplo 3: Determine $h'(x)$ para $h(x) = \int_0^{e^x} Ln\, t\, dt$

Solución:

Haciendo $u = e^x$

Luego

$$h'(x) = \left(\frac{dh}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{d}{du}\int_0^u Ln\, t\, dt\right)\left(\frac{de^x}{dx}\right) = (Ln\, u)(e^x)$$

$$= Ln(e^x)\, e^x = xe^x$$

Regla de sustitución

Regla de sustitución para integrales indefinidas

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable cuyo rango es un intervalo I y f es una función continua, entonces

$$\int f\left(g(x)\right) g'(x)dx = \int f(u)du$$

Regla de substitución para integrales definidas

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable cuyo rango es un intervalo $[a, b]$ y f es una función continua, entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Ejemplo 1: Determine $A = \int_1^5 sen^6 x \; \cos x \, dx$

Solución:

Primero con la integral no definida

$$\int sen^6 x \; \cos x \, dx = \int sen^6 x \, d(sen(x)) \quad \text{si} \quad u = sen(x)$$

$$= \int u^6 \, d(u) = \frac{u^7}{7} \quad = \frac{sen^7 x}{7}$$

Volviendo a la integral definida, para evaluar:

$$A = \int_1^5 sen^6 x \; \cos x \, dx = \left\{ \frac{sen^7 x}{7} \right\} \Bigg|_{x=1}^{5} = \frac{sen^7 5 \; - sen^7 1}{7}$$

Problema 1

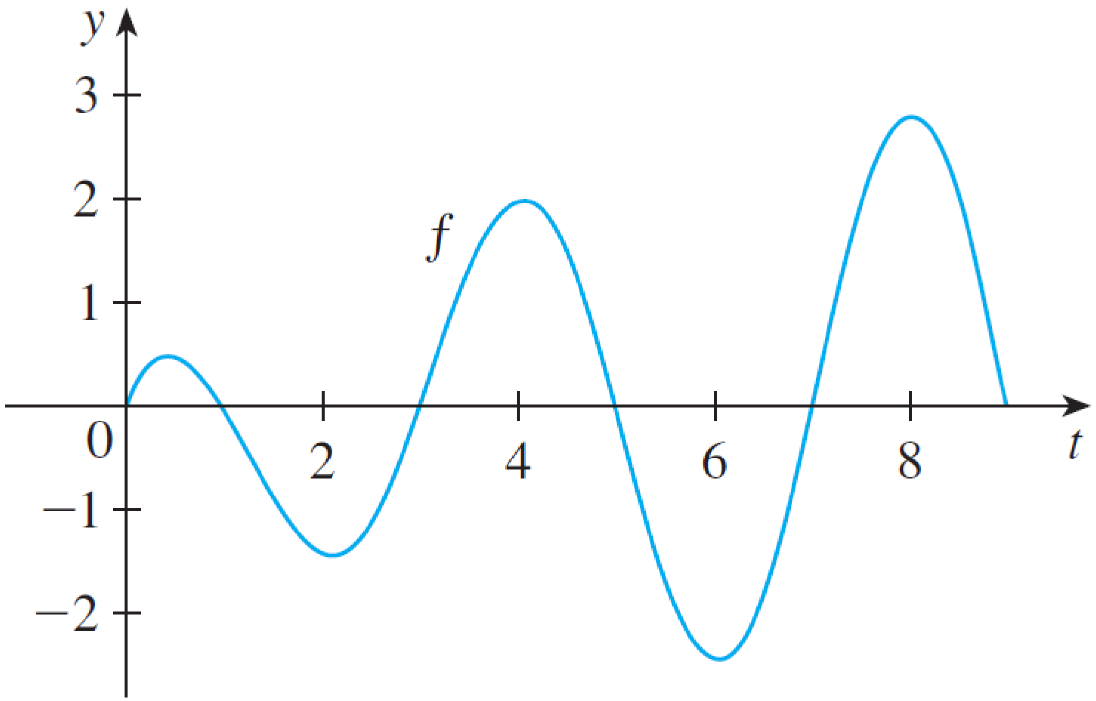
Sea $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ donde f es la función cuya gráfica se muestra

a) ¿Sobre que valores de x se presentan los valores máximos y mínimos locales de g ?

b) Donde alcanza g su valor máximo absoluto?

c) ¿Sobre qué intervalos es cóncava hacia abajo g?

d) Trace la gráfica de g ?



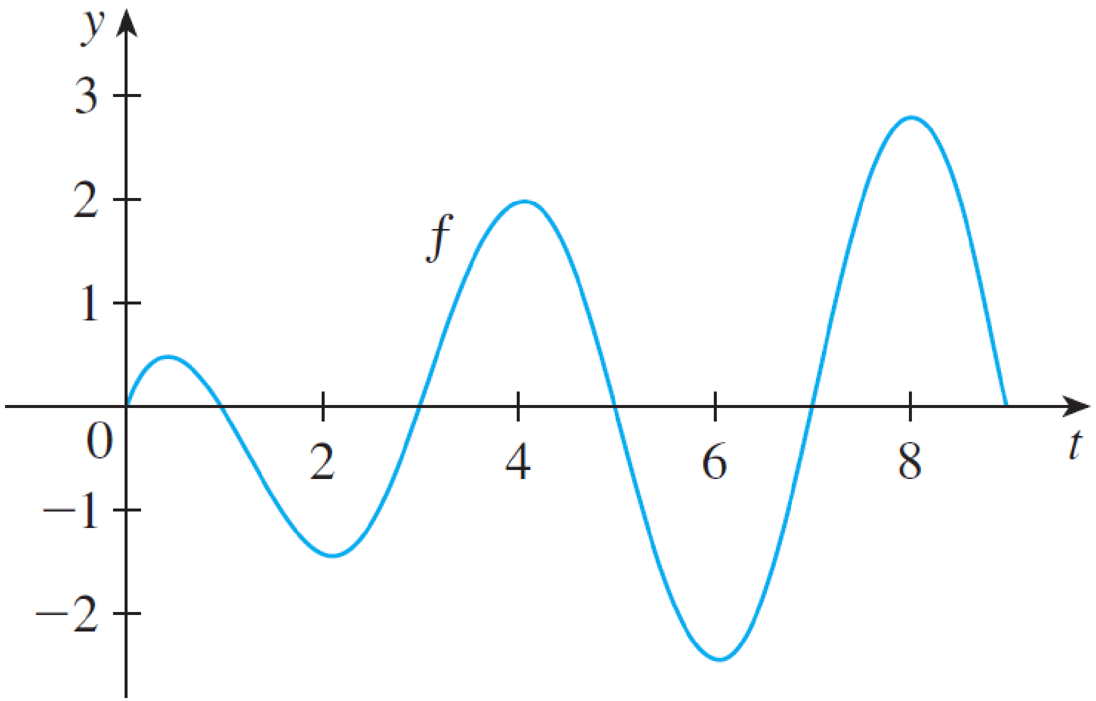
Dado $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ donde f es la función cuya gráfica se muestra

a) ¿Sobre que valores de x se presentan los valores máximos y mínimos locales de g ?

Solución (a)

Para encontrar los puntos críticos:

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x) \;\; = f(x) = 0$$



Luego del gráfico:

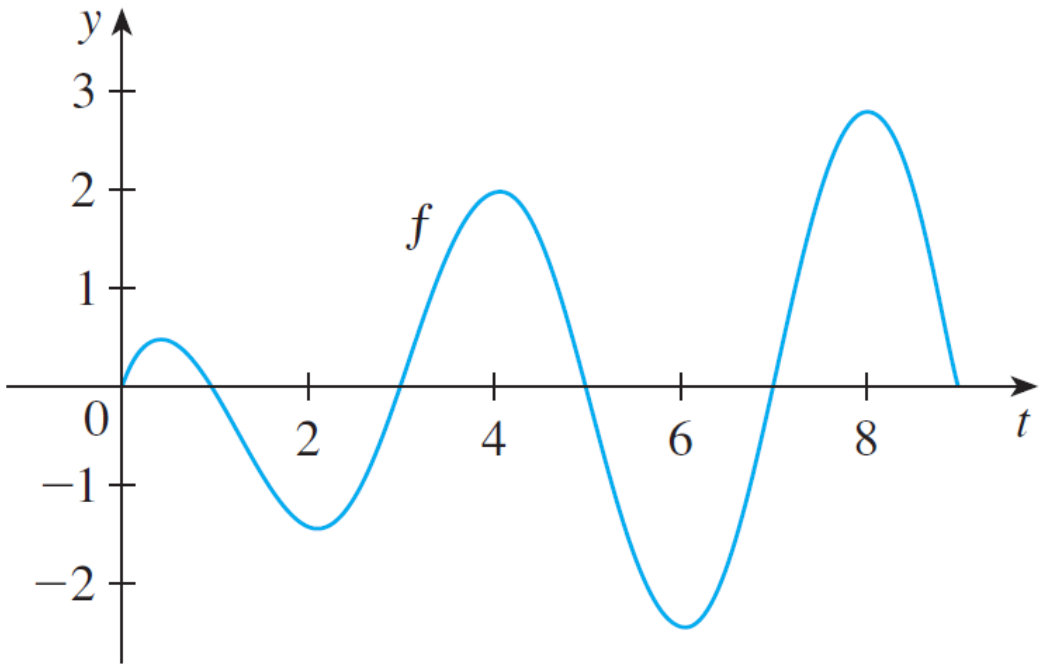
$$x = 0\,;1\,;3\,;5;7\,;9$$

Sobre estos valores se presentan los máximos y mínimos locales de g.

Sea $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ donde f es la función cuya gráfica se muestra

b) Donde alcanza g su valor máximo absoluto?

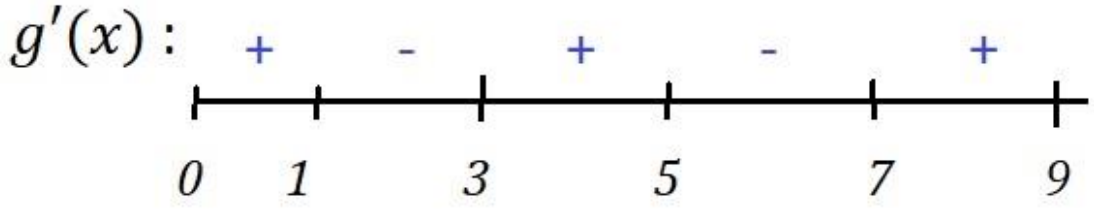
Solución (b)



Para determinar donde alcanza el máximo:

$Observamos\ como\ cambia\ el\ signo\ g'(x)$

$$g'(x) = f(x)$$



Se tiene máximos en : $x = 1$, $x = 5$;

También agregamos , los extremos: $x = 0$, $x = 9$

Evaluando: $g(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$

Evaluando: $g(1) = \int_0^1 f(t)dt \approx 0.25$,

$g(5) = \int_0^5 f(t)dt \approx 0.75$

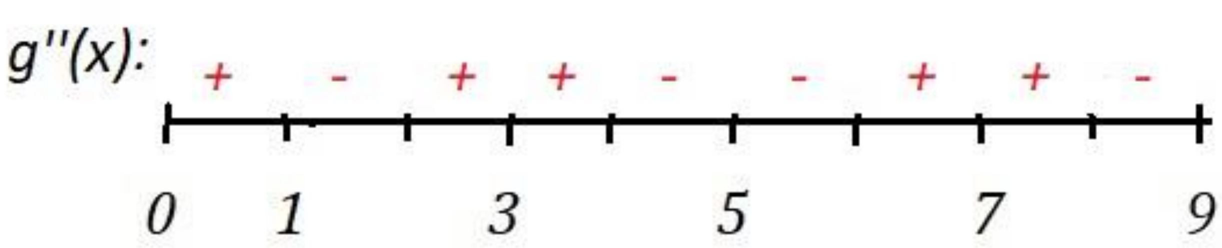
Máximo: $g(9) = \int_0^9 f(t)dt \approx 1.25$

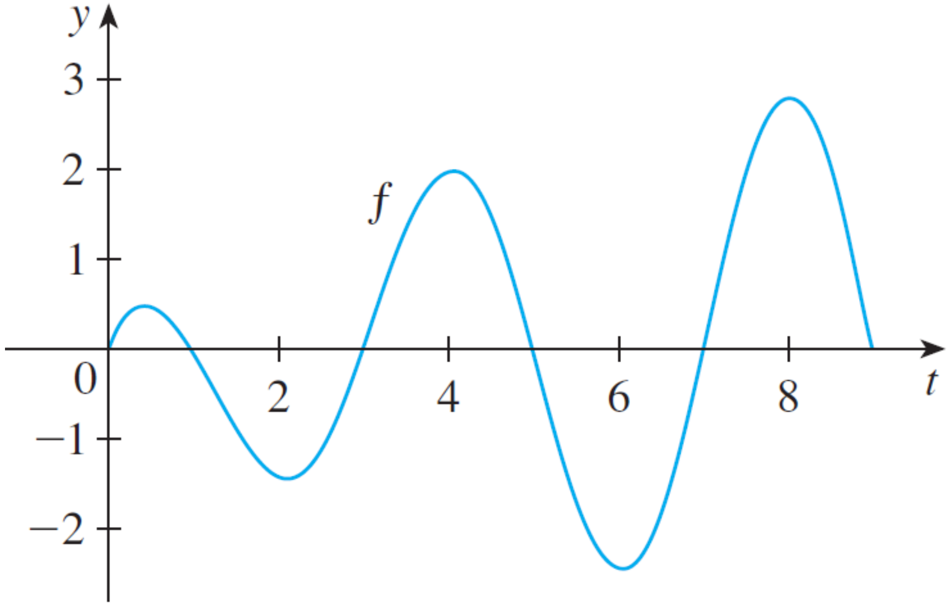
Sea $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ donde f es la función cuya gráfica se muestra

c) ¿Sobre qué intervalos es cóncava hacia abajo g?

Solución (c)

$$g''(x) = f(x) \rightarrow g''(x) = f'(x)$$





Intervalos donde es cóncava hacia abajo:

$I_1 = [1\,;2],\;\; I_2 = [4;6]\;\;;\;\; I_3 = [8\,;9]$

Sea $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ donde f es la función cuya gráfica se muestra

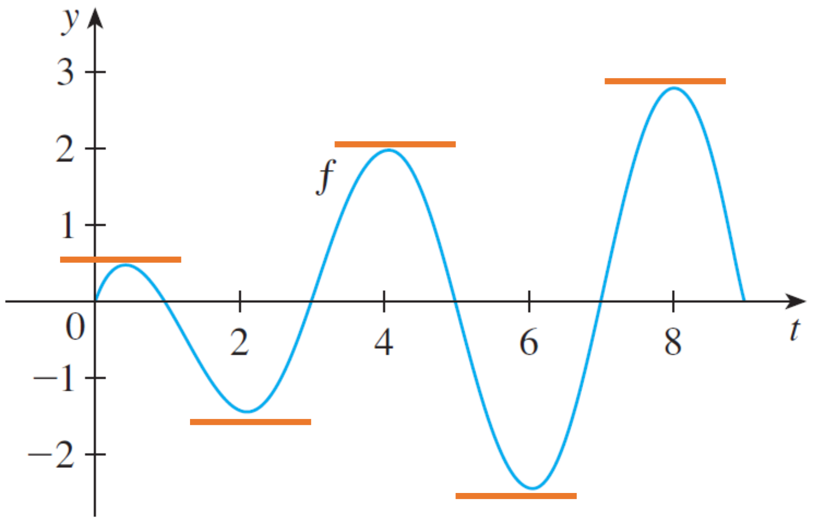
d) Trace la gráfica de g ?

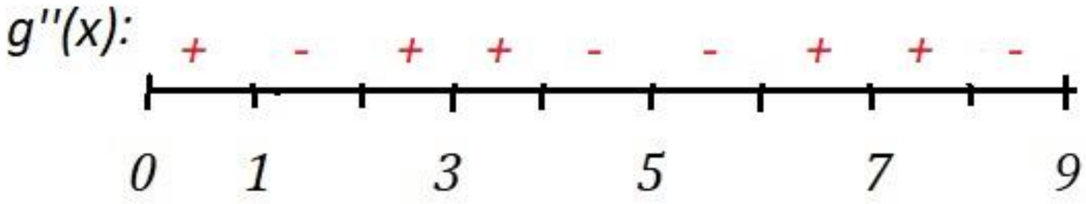
Solución (d)

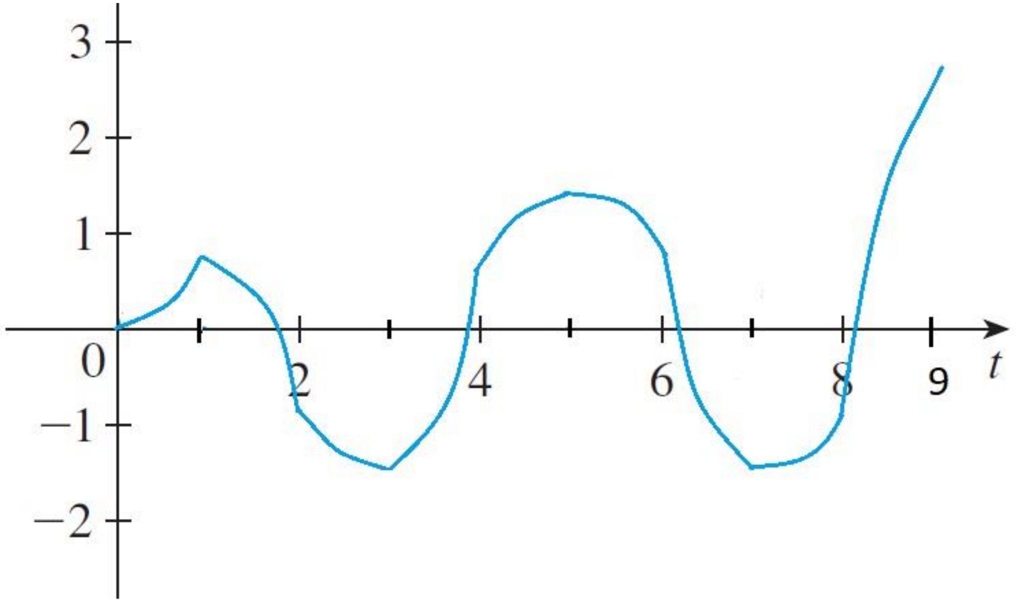
Intervalos donde es cóncava hacia abajo:
$I_1 = [0\,;3],\quad I_2 = [3\,;7]$

Con la relación anterior, veamos los puntos de inflexión

$g'(x) = f(x) \quad \rightarrow \quad g''(x) = f'(x) = 0$







Puntos de inflexión: $x = 1, x = 2\,, x = 4\,, x = 6\,,$

www.utec.edu.pe

www.ce2a.utec.edu.pe