UTEC

UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA

MATEMÁTICAS I - SEMANA 13

Docentes:

Xyoby Chávez Pacheco
Sergio Quispe Rodríguez
Cristina Navarro Flores
Naudy López Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cordelia Khouri de Arciniegas

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

Logro R5

Modelar situaciones reales usando ecuaciones diferenciales y resolverlas usando metodo de separación de variables. (Ley de enfriamiento de Newton, Dinamica poblacional (Logistica, curva de aprendizaje), etc)

Ecuaciones diferenciales

Variables separables

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{h(y)}$$

$$h(y)dy = f(x)dx$$

$$\int h(y)dy = \int f(x)dx$$

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{S}\right)$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Variables separables

Ejemplo 1:

¿Cuál es la solución de la ecuación diferencial? $\dfrac{dx}{dt} = t^2x$

Solución:

Por separación de variables

$$\frac{dx}{dt} = t^2x \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx}{x} = t^2dt \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = \int t^2dt$$

$$\Longrightarrow \quad ln|x| = \frac{t^3}{3} + c \quad \Longrightarrow \quad x(t) = ke^{\frac{t^3}{3}};\ donde\ \ k = e^c$$

Obs: La constante se absorve $\quad x(t) = ce^{\frac{t^3}{3}}$

Ejemplo 2:

¿Cuál es la solución de la ecuación diferencial? $\frac{dP}{dt} = \sqrt{Pt}$; $P(1) = 2$

Solución:

Por separación de variables

$$\frac{dP}{dt} = \sqrt{Pt} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dP}{\sqrt{P}} = \sqrt{t}dt \quad \Longrightarrow \quad \int P^{-1/2}dP = \int t^{1/2}dt$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{P^{1/2}}{1/2} = \frac{t^{3/2}}{3/2} + c$$

$$\Longrightarrow \quad P^{1/2} = \frac{1}{3}t^{3/2} + c$$

Obs: La constante se absorve

Para hallar la constante c:

$$Si\ t = 1, P = 2:\ c = 1.08$$

$$P(t) = \left(\frac{1}{3}t^{3/2} + 1.08\right)^2$$

UTEC

Dinámica poblacional

Modelo de crecimiento poblacional: La población crece a una tasa proporcional al tamaño de la población.

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad , \quad P(0) = P_0$$

Ecuación diferencial que se resuelve con separación de variables.

Dinámica poblacional

Modelo de crecimiento poblacional logístico: La tasa de crecimiento empieza a disminuir cuando la población se acerca su tope M.

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right) \quad \text{donde} \quad P(t_0) = P_0 \;\; y \;\; P(t_1) = P_1$$

* Ecuación diferencial que se resuelve con separación de variables.

Ley de enfriamiento o calentamiento de Newton

Donde:

$\mathrm{T(t)}$: $Temperatura\ de\ un\ cuerpo\ en\ un\ tiempo\ t$

T_m: $Temperatura\ del\ medio\ circundante$

$\frac{dT}{dt}$: $Rapidez\ con\ la\ que\ cambia\ la\ temperatura.$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

* Ecuación diferencial que se resuelve con separación de variables.

Problema 1

La ecuación de Gompertz fue creada por el matemático judio Benjamín Gompertz en 1938 y lo usó para describir el crecimiento de tumores sólidos, asumiendo que la tasa de crecimiento de los tumores disminuye de forma no lineal cuando aumenta su masa. Esta ecuación es la siguiente:

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N[K - \ln(N)]$$

Donde N representa el número de células tumorales en el instante t, γ una constante propia de cada tumor y K es el logaritmo nepereano de la capacidad de carga del tumor, es decir la constante máxima que puede alcanzar con los nutrientes disponibles.

a) Resuelva la ecuación diferencial.

b) Si la capacidad de carga es de 10^{13}células, el ratio $\gamma = 0.006$ y la población inicial es de 10^9 células. ¿En qué tiempo el número de células se duplica?

c) ¿Cuál es el valor de N, para el cual el número de células crece más rápido?

a) Resuelva la ecuación diferencial

Solución:

De la ecuación diferencial: $\frac{dN}{dt} = \gamma N[K - \ln(N)] \quad \Longrightarrow \quad \frac{dN}{N\,[K - \ln(N)]} = \gamma dt$

Haciendo:

$u = K - \ln(N) \quad \Longrightarrow \quad du = -\frac{dN}{N}$

De aquí: $\frac{dN}{N\,[K - \ln(N)]} = \gamma dt \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{u} = -\gamma dt \;\; luego \quad \int \frac{du}{u} = -\gamma \int dt$

Luego

$ln|u| = -\gamma t + c \quad \Longrightarrow u = ce^{-\gamma t} \Longrightarrow K - \ln(N) = ce^{-\gamma t} \quad \ldots \; (1)$

Así: $\ln(N) = K - ce^{-\gamma t}$

Despejando: $N(t) = C_1 e^{-ce^{-\gamma t}}$ donde $C_1 = e^K \ldots \; (2)$

b) Si la capacidad de carga es de 10^{13}células, el ratio $\gamma = 0.006$ y la población inicial es de 10^9 células. ¿En qué tiempo el número de células se duplica?

Solución:

Se tiene: $K = \ln(10^{13}) = 13\ln(10)$, $\gamma = 0.006$, $P(0) = 10^9$

En la expresión (1):

$$K - \ln(N) = ce^{-\gamma t} \implies si\ t = 0: \quad c = 13\ln(10) - \ln(10^9) = 9.21$$

En la expresión (2):

$$C_1 = e^K = 10^{13} \implies N(t) = 10^{13}e^{-9.21e^{-0.006t}} \quad \ldots \quad (3)$$

Planteando:

$$N(t) = 2(10^9) \implies t = \frac{1}{-0.006} ln\left[\frac{\ln(2(10^{-4}))}{-9.21}\right] = 13.04 \text{ días}$$

c) ¿ Cuál es el valor de N, para el cual el número de células crece más rápido?

Solución:

De (b) se tiene: $$\frac{dN}{dt} = 0.006\, N\, [\ln(10^{13}) - \ln(N)]$$ Se tiene el crecimiento

Crece más rápido si: $$\frac{d^2N}{dt^2} = 0.006\, N\, [\ln(10^{13}) - \ln(N)] + 0.006\, N \left[-\frac{1}{N}\right] = 0$$

El valor de N para el cual Crece más rápido es:

$$N = \frac{10^{13}}{e} \approx 3.6 \times 10^{12}$$

Problema 2

El porcentaje de muertes y el porcentaje de nacimientos de numerosas especies de animales y de plantas fluctúan periódicamente con las estaciones del año. La rapidez del crecimiento relativo (rapidez de crecimiento dividida por el tamaño de la población) equivale a $(b + a\cos 2\pi t)$ donde a y b con constantes

$$\frac{\frac{dP}{dt}}{P} = b + a\cos(2\pi t)$$

Un rebaño de grandes mamíferos tiene una población $P(t)$ que fluctúa periódicamente con las estaciones donde t se mide en años. Inicialmente hay 3000 animales en el rebaño y se observa que la población después de 3 meses es de 2800 animales.

a) Utilice esta información para determinar la regla de correspondencia de $P(t)$.

b) ¿En qué momento la población alcanza su nivel más alto? ¿y el más bajo?

a) Utilice esta información para determinar la regla de correspondencia de $P(t)$

Solución:

De la ecuación diferencial: $\dfrac{\frac{dP}{dt}}{P} = b + a\cos(2\pi t)$, a,b :ctes

$$despejando \quad \frac{dP}{dt} = P(b + a\cos(2\pi t)) \Longrightarrow \frac{dP}{P} = (b + a\cos(2\pi t))dt$$

Por separación de variables $\displaystyle\int \frac{dP}{P} = \int [b + \text{a}\cos(2\pi t)]dt + \text{c}$

Resolviendo: $\ln(P) = bt + \dfrac{a}{2\pi} sen(2\pi t) + c \Longrightarrow \mathrm{P} = C\, e^{\left[bt + \frac{a}{2\pi} sen(2\pi t)\right]}$

Hallando c: $\text{si t} = 0 \Longrightarrow C = 3000$

Por lo tanto $\mathrm{P(t)} = 3000\, e^{\left[bt + \frac{a}{2\pi} sen(2\pi t)\right]}$

b) ¿En qué momento la población alcanza su nivel más alto? ¿y el más bajo?

Solución:

De la ecuación diferencial: $$\frac{dP}{dt} = P(b + a\cos(2\pi t)) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \cancel{P = 0} \quad \text{ó} \quad b + a\cos(2\pi t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{1}{2\pi} arcCos(-\frac{b}{a})$$

De (b):

$$P(t) = 3000\, e^{\left[bt + \frac{a}{2\pi} sen(2\pi t)\right]}$$

El valor más bajo alcanza para t=0: $Si\ t = 0, P = 3000$

El valor más alto alcanza para $t = \frac{1}{2\pi} arcCos(-\frac{b}{a})$

www.utec.edu.pe

www.ce2a.utec.edu.pe