UTEC

UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA

MATEMÁTICAS I - SEMANA 14

Docentes:
Xyoby Chávez Pacheco
Sergio Quispe Rodríguez
Cristina Navarro Flores
Naudy López Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cordelia Khouri de Arciniegas

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

Logro FR1

Resuelve problemas basados en los logros del curso.

Ecuaciones diferenciales

Variables separables

La tasa poblacional es directamente proporcional al tamaño de la población.

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

El cambio de temperatura del sistema es directamente proporcional a la diferencia de la temperatura del objeto y la temperatura del medio ambiente.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

La velocidad de reacción de la sustancia es directamente proporcional al producto de la cantidad de sustancia que reacciona por la cantidad que no reacciona.

$$\frac{dC}{dt} = kC_R . C_{NR} = kC(T - C_R)$$

El crecimiento de la población es directamente proporcional al producto del tamaño de la población por la diferencia del limite poblacional y el tamaño de la población.

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{S}\right)$$

Problema 1:

Un modelo matemático que puede usarse para determinar el tiempo t necesario para que el derrame de una sustancia volátil se evapore está dado por la ecuación

$$C = \int_0^t \frac{KA(u)}{V_0} du \qquad \text{.... (1)}$$

donde A(u) es el área del derrame en el instante u, C es un término termodinámico adimensional, K es un coeficiente de transferencia de masa y es V_0 el volumen derramado. Suponga que el derrame se expande en forma circular con un radio inicial de 100m. Si el radio r del derrame crece a razón $0.01 m/s$,

A. (3 puntos) Resuelva la ecuación (1) para t en términos de los otros símbolos,
B. (2 puntos) Valores típicos para C y K son 1.9×10^6 y 0.01 mm/s respectivamente (para el tridecano, un hidrocarburo alcano). Si el volumen derramado es $V_0 = 10\ 000\ m^3$, ¿en cuánto tiempo se evapora?.
C. (1 punto) Use el resultado en el inciso B) para determinar al área final del derrame de la sustancia.
D. (2 puntos) Con las mismas condiciones anteriores pero ahora para una tasa de crecimiento del radio en el tiempo t de $2.5e^{-0.01t}$ m/s, plante plantea una ecuación sin integrales para determinar el tiempo de evaporación.

Solución:

1A. SOLUCIÓN

Primero modelamos el radio como función del tiempo "t". Para ello tomamos las condiciones iniciales.

$$\frac{dr(u)}{du} = 0.01\tfrac{m}{s}; r(0) = 100m$$

Integramos, obtenemos el radio y el área asociada (círculo):

$$r(u) = 0.01u + 100 \ (m) \rightarrow A(u) = \pi(0.01u + 100)^2$$

Reemplazamos la función en la integral y resolvemos por sustitución de variable

v=(0.01 u +100) $\Longrightarrow$ $C = \int_0^t \frac{K}{V_0}\pi(0.01u + 100)^2 du = \frac{K\pi}{V_0}[100 * \frac{(0.01u+100)^3}{3}]$

Evaluando en los límites de integración, el tiempo queda definido como:

$$t = 100[\sqrt[3]{\frac{3CV_0}{100\pi K} + 100^3} - 100]$$

1B. SOLUCIÓN

Evaluamos reemplazando los valores de las constantes involucradas (en las unidades adecuadas): $C = 1.9 * 10^6; K = \frac{0.01mm}{s} = \frac{10^{-5}m}{s}; V_0 = 10000m^3$

$$t = 2617695.29s = 43628.25min = 727.14h = 24.24\ días$$

1C. SOLUCIÓN:

Evaluamos el área para el tiempo obtenido en segundos:

$$A = 2.15 * 10^{13}m^2$$

1D. SOLUCIÓN

De condiciones iniciales para el radio $\frac{dr}{du} = 2.5e^{-0.01t}\frac{m}{s}; r(0) = 100$, obteniendo que:

$$r(u) = -250e^{-0.01u} + 350$$

Asimismo el área

$$A = \pi(-250e^{-0.01u} + 350)^2$$

Siendo finalmente la ecuación para determinar el tiempo dada por:

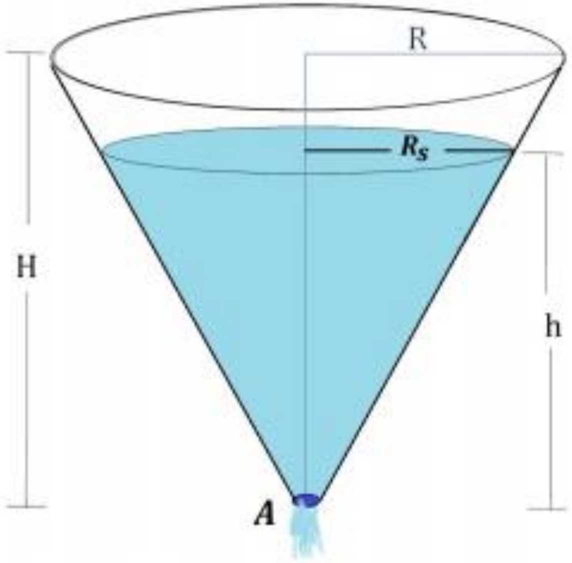
$$C = \int_0^t \frac{K}{V_0}\pi(-250e^{-0.01u} + 350)^2 du \quad = \frac{K}{V_0}\pi\int_0^t 62500e^{-0.02u} - 175000e^{-0.01u} + 122500\, du$$

Integrando queda:

$$= \frac{K}{V_0}\pi\,(\,122500\,t \;-\; 3125000\,e\hat{}(-0.02\,t) \;+\; 17500000\,e\hat{}(-0.01\,t) \;-\; 14375000)$$

Problema 2:

Suponga que un tanque de agua tiene la forma de un cono invertido. Si se permite una fuga de agua bajo el efecto de la gravedad a través de un orificio en el fondo del tanque, entonces según la ley de Torricelli, la tasa de variación del volumen de agua V respecto al tiempo en el instante t está dada por la ecuación diferencial



$$\frac{dV}{dt} = -cA\sqrt{2gh}$$

donde A es el área del orificio y c es un factor de fricción/contracción en el orificio. Si el volumen de un cono de radio R y altura H es $V = \frac{\pi R^2 H}{3}$,

A. (1 punto) Exprese el volumen de agua en términos de h, si R = 8 m y H = 12 m.
B. (4 puntos) Resuelva la ecuación diferencial y determine una relación entre la altura del nivel de agua y el tiempo t transcurrido desde que el tanque estaba lleno considerando un orificio circular de radio 0.01m.
C. (1 punto) ¿En cuánto tiempo se vacía el tanque si el factor de fricción/contracción es c = 0.6?
D. (1 punto) Si la forma del tanque se invirtiera, con el orificio siempre en la parte inferior, ¿ se vaciaría en el mismo tiempo? Responda sin hacer cálculo alguno. Responda sólo en base a los cálculos realizado anteriormente.

2A. SOLUCIÓN:

Modelamos la altura del agua en base a congruencia de triángulos: $\frac{h}{H} = \frac{r}{R} \longrightarrow r = \frac{2}{3}h$, obteniendo el volumen en función de h:

$$V = \frac{4\pi}{27}h^3$$

2B. SOLUCIÓN:

Reemplazamos el resultado anterior en la ec. Diferencial del problema, obteniendo que:

$$\frac{4\pi h^2}{9}\frac{dh}{dt} = -cA\sqrt{2g}\sqrt{h} \longrightarrow \int_{12}^{h} h^{\frac{3}{2}}dh = \int_{0}^{t} \frac{-9\sqrt{2g}cA}{4\pi}dt$$

Resolvemos la ec. Diferencial tal que:

$$\frac{2}{5}\left(h^{\frac{5}{2}} - 12^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{-9\sqrt{2g}cA}{4\pi}t$$

Considerando que $A = \pi r^2 = \pi(0.01)^2$, obteniendo finalmente, la siguiente expresión algebraica,

$$t = -\frac{8}{45\sqrt{2g}c*10^{-4}}\left(h^{\frac{5}{2}} - 12^{\frac{5}{2}}\right)$$

2C. SOLUCIÓN:

Evaluamos el resultado anterior para los datos proporcionados ($c = 0.6$) :

$$t = 249361.9s$$

2D. SOLUCIÓN:

Por ejemplo, no se vaciará al mismo tiempo porque al invertir el tanque el volumen del líquido adopta la geometría de un cono truncado alterando así el análisis previamente realizado.

Problema 3:

Un fabricante determina que t meses después de introducir un producto nuevo, las ventas de la compañía serán S(t) miles de dólares, donde

$$S(t) = \frac{750t}{\sqrt{4t^2 + 25}}$$

¿Cuál es el promedio de las ventas mensuales V de la compañía en los primeros 6 meses después de la introducción del producto nuevo?

$$V(t) = \frac{1}{6-0} \int_0^6 \frac{750t}{\sqrt{4t^2 + 25}} dt$$

$$u = \sqrt{4t^2 + 25}$$

$$u^2 = 4t^2 + 25$$

$$2udu = 8tdt$$

$$t = 0; u = 5$$

$$t = 6; u = 13$$

$$V(t) = \frac{750}{6} * \frac{1}{4} \int_5^{13} \frac{u}{u} du = \frac{125}{4} \mathrm{u}\Big|_5^{13} = 250$$

El promedio de las ventas de la compañía es de $250 000 por mes en ese período.

www.utec.edu.pe

www.ce2a.utec.edu.pe