UTEC

UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA

MATEMÁTICAS I - SEMANA 7

Logro D3

Docentes:
Xyoby Chávez Pacheco
Sergio Quispe Rodríguez
Cristina Navarro Flores
Naudy López Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cordelia Khouri de Arciniegas

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

Pautas de la sesión:

- Tiempo aproximado 2 hora
- Realizar preguntas por el chat.
- Silenciar su micrófono.
- Indicar el momento de preguntas
- Habilitar la cámara.
- La grabación de la sesión se cargará a Canvas.

Logro D3

Resolver problemas de contexto real del entorno cercano que involucran el cálculo de velocidades relacionadas teniendo presente el uso de los diferenciales.

Aspectos importantes a considerar:

1) Las notaciones a usar:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Donde: Los símbolos D y d/dx se llaman operadores de la derivación

2) La regla de la cadena:

Dada la función compuesta $\mathrm{F(x)} = (f o g)(x) = f\big(g(x)\big)$ entonces;

Su derivada se puede escribir como: $F'(x) = f'\big(g(x)\big).\,g'(x)$

Del mismo modo mediante el uso de diferenciales se puede escribir así:

$Siendo\ u = g(x)$: $\frac{d}{dx}F = \left(\frac{d}{du}f\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$ ó $\frac{df}{dx} = \left(\frac{df}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$

Razón de cambio:

Si una cantidad x está en función del tiempo t, la razón de cambio de x con respecto a t está dada por **dx/dt.**

Si dos o más cantidades se relacionan con una ecuación, la razón de cambio de cada cantidad se obtiene derivando la ecuación.

En particular, si tenemos una expresión que se relaciona a su vez con otra variable como el tiempo, entonces:

Las dos funciones relacionadas serían:

$$y=f(x);\ \text{y}\ \ x=g(t)$$

Si se quiere la **razón de cambio de y respecto a la variable t, entonces:**

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

Pasos para resolver problemas de razón de cambio:

Se traza un dibujo que contemple todas las variables y constantes que intervengan en el problema.

Se elabora un modelo matemático que relacione las variables.

Se deriva el modelo matemático respecto al tiempo, se despeja la incógnita a conocer y se sustituyen los datos dados.

Recordando de la clase pasada

Ejemplo 1:

Se infla un globo esférico y su volumen crece a una razón de 100 cm^3/s ¿Qué tan rápido aumenta el radio del globo cuando el diámetro es de 50cm?

Solución

Datos: $\frac{dV}{dt} = 100cm^3/s$ queremos $\frac{dR}{dt} =?$

Sabemos: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Diferenciando: $dV = \frac{4}{3}\pi(3R^2\, dR)$

entonces $dV = 4\pi\, R^2\, dR$

Dividiendo ambos lados por dt

Se tiene: $\frac{dV}{dt} = 4\pi\, R^2\, \frac{dR}{dt}$

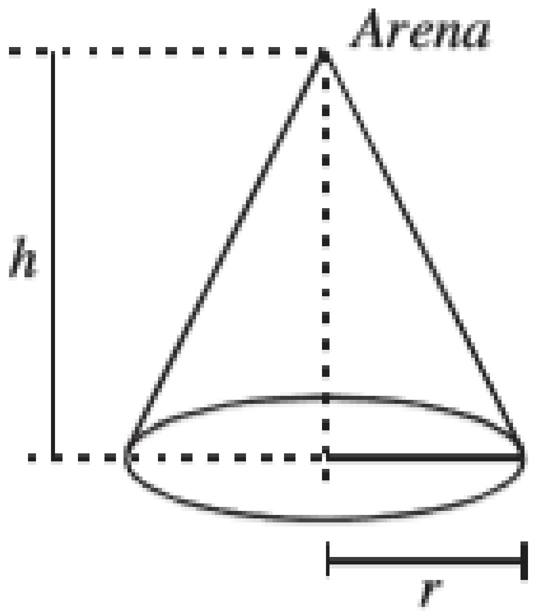
Reemplazando el dato:

$$100 = 4\pi\left(25^2\, \frac{dR}{dt}\right)$$

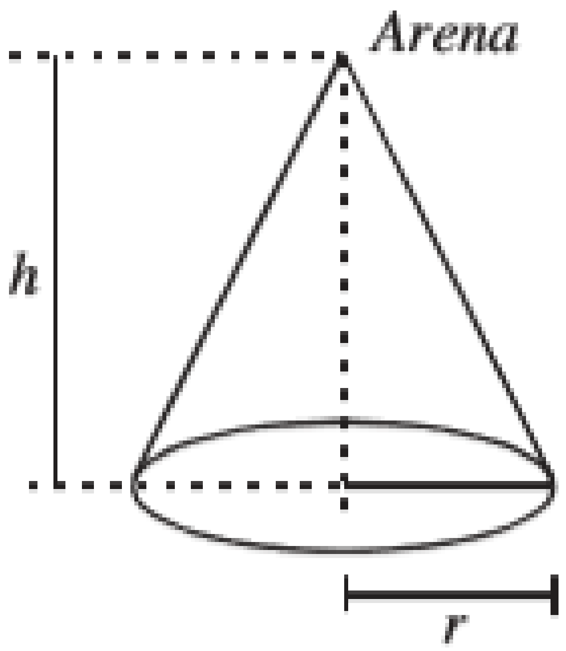
Respuesta: $\frac{dR}{dt} = \frac{1}{25\pi} cm/s$

Ejercicio 1:

Se está vaciando arena sobre un montón de forma cónica a razón de $30m^3/min$, la altura del cono es siempre igual al radio de su base. ¿Con qué rapidez aumenta su altura cuando el montón tiene tres metros de altura?



Volumen del cono: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$



$$V = \frac{1}{3}\pi h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{30m^3}{min}$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

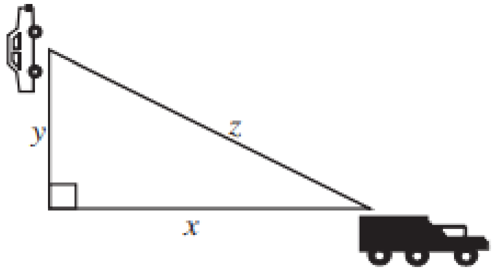
$$\frac{dh}{dt} = \frac{10m}{3\pi min}$$

La altura aumenta a razón de $\frac{10m}{3\pi min}$

Ejercicio 2:

Un automóvil se dirige al norte de una ciudad a razón de 60 km h , al mismo tiempo un camión se dirige al este de la ciudad a razón de 80 km h . ¿Cuál es la razón con la que varía la distancia entre los vehículos cuando el automóvil y el camión se encuentran a 30 y 40 km, respectivamente, de su punto de partida?

Solución:



Donde:

$$x = 40 \text{ km}, y = 30 \text{ km}; \quad \frac{dy}{dt} = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}; \quad \frac{dx}{dt} = 80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Se debe encontrar con qué rapidez se separan los vehículos, es decir, $\left(\frac{dz}{dt}\right)$

La figura representa un triángulo rectángulo, por tanto, se aplica el teorema de Pitágoras para obtener la relación:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Se deriva la expresión respecto al tiempo: $$\frac{dz^2}{dt} = \frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt}$$

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{y}{z}\cdot\frac{dy}{dt}$$

Luego, en el momento en que x = 40 km; y = 30 km

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2\,500} = 50 \text{ km}$$

Entonces,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{40 \text{ km}}{50 \text{ km}}\left(80\frac{\text{km}}{\text{h}}\right) + \frac{30 \text{ km}}{50 \text{ km}}\left(60\frac{\text{km}}{\text{h}}\right) = 100\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

La razón a la que se separan los vehículos es de: $100\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$

Ejercicio 3:

Una cámara de televisión se instala a 4000 pies de la base de una plataforma de lanzamiento de cohetes. El ángulo de elevación de la cámara tiene que cambiar con la rapidez correcta con el objeto de tener siempre a la vista al cohete. Asimismo, el mecanismo de enfoque de la cámara tiene que tomar en cuenta la distancia creciente de la cámara al cohete que se eleva. Suponga que el cohete se eleva verticalmente y que su rapidez es 600 pies/s cuando se ha elevado 3 000 pies.

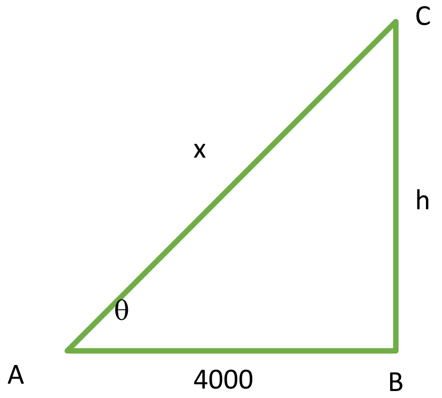
a) ¿Qué tan rápido cambia la distancia de la cámara de televisión al cohete en ese momento? Interprete el resultado.

b) Si la cámara de televisión se mantiene dirigida hacia el cohete, ¿qué tan rápido cambia el ángulo de elevación de la cámara en ese momento? Interprete el resultado.

Solución:

a) Realizamos un esquema que refleje el planteamiento del problema. En el punto A se ubica la cámara.

Se desea determinar dx/dt.

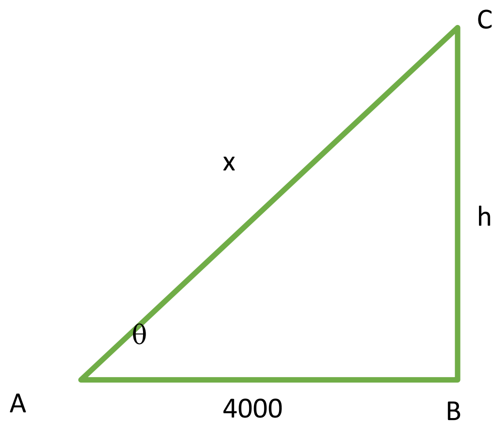


Luego,

$$x^2 = 4000^2 + h^2$$

Diferenciamos respecto a t:

$$2x\frac{dx}{dt} = 2h\frac{dh}{dt}$$



Como h=3000, dh/dt=600 pies/s y $x = \sqrt{4000^2 + 3000^2} = 5000\ pies$

Reemplazamos:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{h}{x}\frac{dh}{dt} = 360\ pies/s$$

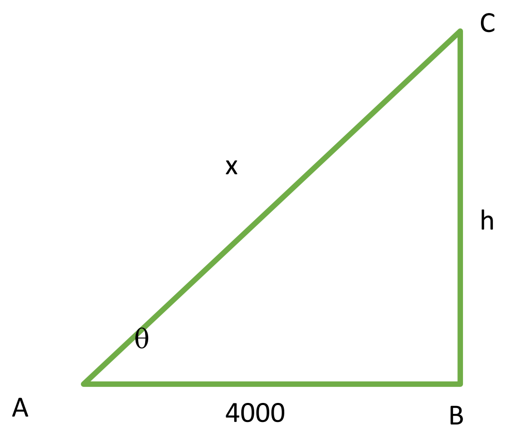
La distancia de la cámara de tv al cohete cambia a 360 pies/s cuando el cohete alcanza 3000 pies de altura.

b) Ahora se requiere determinar dθ/dt. Así, de la misma figura obtenemos:

$$tg\theta = \frac{h}{4000}$$

Diferenciamos respecto a t: $sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{4000}\frac{dh}{dt} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{cos^2\theta}{4000}\frac{dh}{dt}$

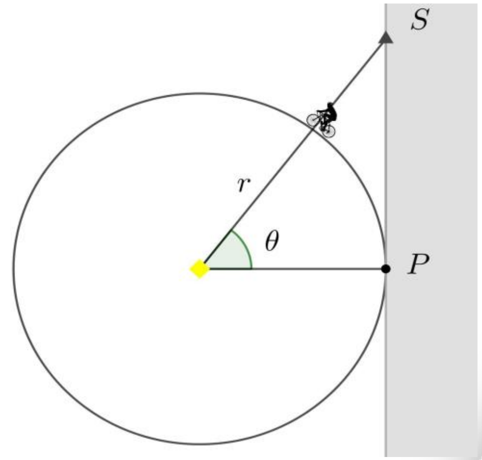
Reemplazamos dh/dt=600 pies/s, cosθ=4/5,



$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^2}{4000} 600 = 0{,}096\, rad/s$$

El ángulo de elevación cambia 0,096 rad/s en ese momento.

Ejercicio 4:



Un ciclista que se encuentra en preparación para los juegos panamericanos, está recorriendo una pista circular de 40 m de radio a razón de 360 m/min. En el centro de la pista, alumbra un foco, el cual proyecta la sombra del ciclista sobre unas gradas que son tangente a la pista en el punto P, como se muestra en la figura. Determine

A. Expresa la longitud del segmento SP en términos de r y el ángulo
B. ¿Cuál es la velocidad con la que se mueve la sombra S del ciclista en el instante en que ha recorrido 1/12 de la pista desde el punto P?
C. Después de pasar 20 veces por el punto P y mantener su velocidad constante, su desplazamiento angular disminuye conforme a la relación $\theta(t) = C\, e^{-0.05t}\, rad$ donde t es el tiempo transcurrido desde que pasa por última vez por el punto P. Con estas condiciones responde ahora la misma pregunta del item A.

Solución:

A) r=40 m,

SP=x

$$\frac{dL}{dt} = 360m/min$$

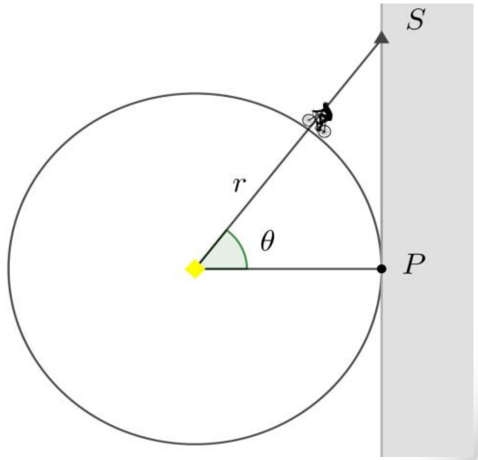
De la figura tenemos:

$$tan\theta = \frac{x}{r}$$

Dado que la longitud de arco L es: L=θr , queda: $\tan\left(\frac{L}{40}\right) = \frac{x}{40}$

Despejando la expresión anterior queda:

$$x = 40\tan\left(\frac{L}{40}\right)$$



B) $P=80\pi,\ L = \frac{P}{12} = \frac{20}{3}\pi$

Derivando la expresión obtenida en A, queda:

$$\frac{dx}{dt} = 40\sec^2\left(\frac{L}{40}\right)\left(\frac{1}{40}\right)\frac{dL}{dt} = 480\ m/min$$

C) $\theta(t) = C\,e^{-0.05t}\,rad,$

Derivando la expresión, queda:

$$d\theta/dt = -0.05Ce^{-0.05t}\ rad/min$$

De lo anterior, si derivamos respecto de t:

$$x = 40tan\theta$$

Ahora reemplazamos, obteniendo:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = 40\sec^2\theta\,(-0.05Ce^{-0.05t})$$

Lo que expresaría la razón de cambio del segmento SP en términos del tiempo y el ángulo www.utec.edu.pe

www.ce2a.utec.edu.pe