UTEC

UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA

MATEMÁTICAS I - SEMANA 8

Docentes:

Xyoby Chávez Pacheco
Sergio Quispe Rodríguez
Cristina Navarro Flores
Naudy López Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cordelia Khouri de Arciniegas

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

Logro D4

Resolver problemas de optimización analizando el comportamiento de una función mediante su primera y segunda derivada (crecimiento, decrecimiento, concavidad, extremos)

Criterio de la primera y segunda derivada

Teorema

Si f *tiene un máximo o mínimo local en* c*, y si* $f'(c)$ *existe, por lo tanto*

$$f'(c) = 0$$

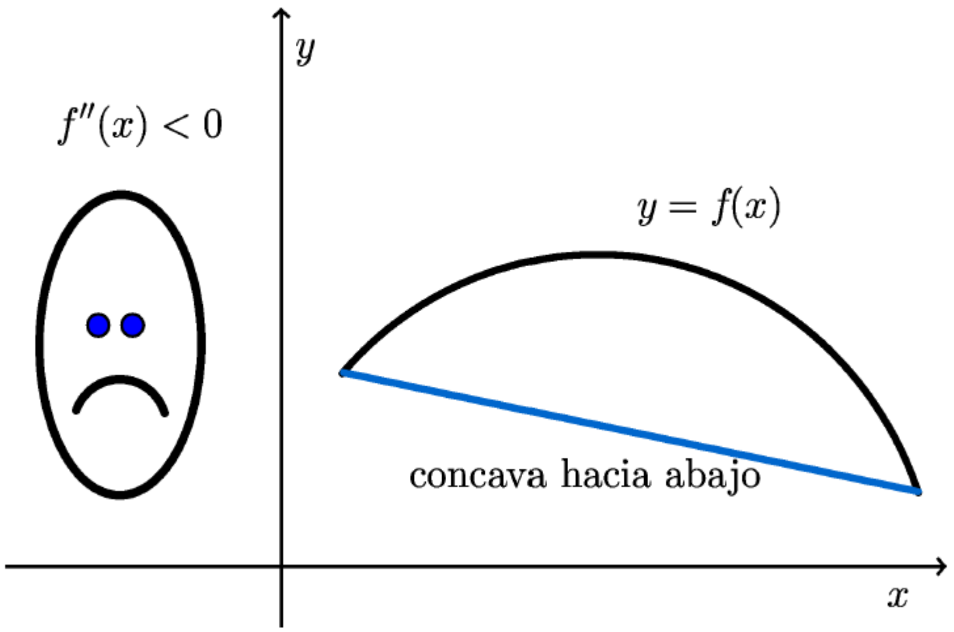
Definición

Un punto critico de una función f es un número c en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

Criterio de la primera y segunda derivada

Definición

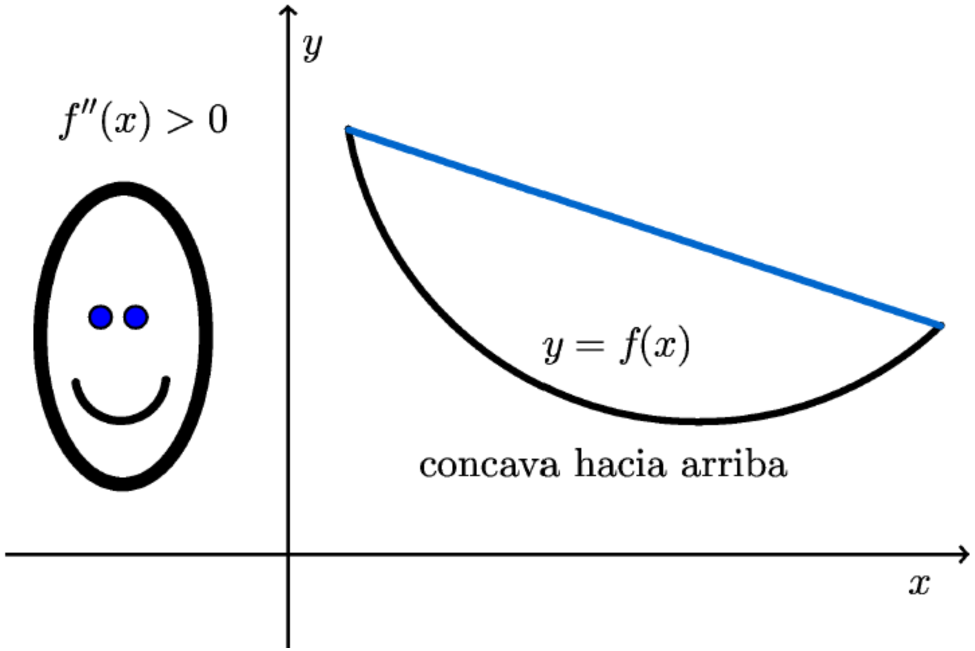
Una función $y = f(x)$ es llamada concava o concava hacia abajo sobre un intervalo I se ve como



Criterio de la primera y segunda derivada

Definición

Una función $y = f(x)$ es llamada convexa o concava hacia arriba sobre un intervalo I se ve como



Criterio de la primera y segunda derivada

Teorema.- Sea f una función diferenciable en (a,b) y continua en $[a,b]$

a) Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a,b) entonces f es creciente en $[a,b]$.

b) Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a,b) entonces f es decreciente en $[a,b]$.

Supongamos que c es un punto crítico de una función continua f

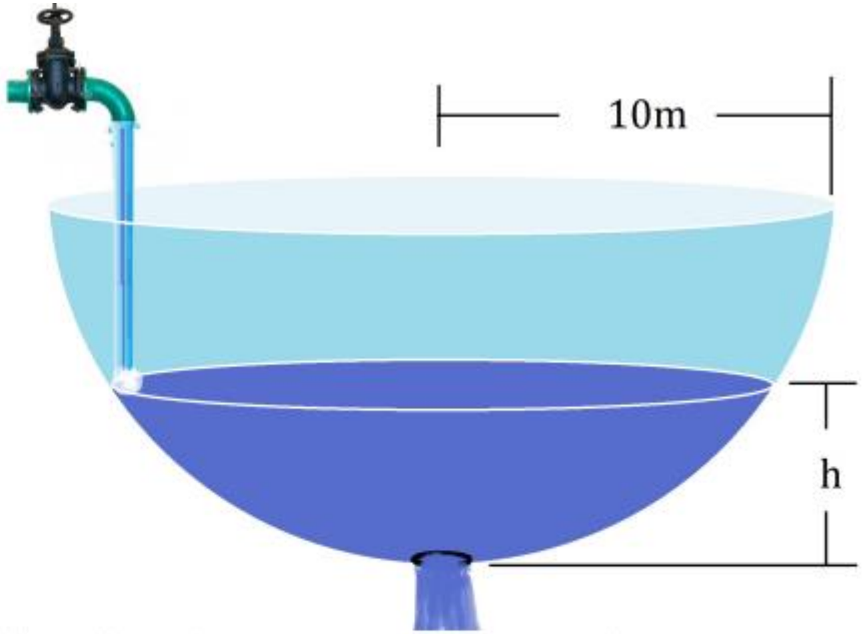
- Si f' cambia de + a - en c, entonces f tiene un máximo local.
- Si f' cambia de - a + en c, entonces f tiene un mínimo local.
- Si f' no cambia de signo en c, entonces f no tiene ni mínimo ni máximo local.

Problema N°01

Por un caño sale agua hacia un tanque semiesférico de 10m de radio a razón de 1.1 m^3/min, y de éste fluye agua por un orificio en la parte inferior a razón de 2.5m^3/min. El volumen de agua en el tanque en cualquier instante t es V=10π$h^2 - \frac{\pi}{3} h^3 donde$ h=h(t) es la altura del nivel de agua (en metros) medido desde la base. V está medido en metros cúbicos y t en minutos.

a) La profundidad de agua ¿aumenta o disminuye?

b) ¿A razón de cuánto cambia la profundidad del agua h en el instante en el que esta profundidad es de 4 metros?



Problema N°01 -

a) La profundidad de agua ¿aumenta o disminuye?

Solución

Datos:

$$\frac{dVentra}{dt} = 1.1\ m^3/\min$$

$$\frac{dVsale}{dt} = 2.5\ m^3/\min$$

Modelo:

Definimos el volumen total del tanque como la diferencia entre el volumen que ingresa (caño) y el volumen que sale (orificio)

$$V = 10\pi h^2 - \frac{\pi}{3}h^3 = \text{Ventra-Vsale}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dVentra}{dt} - \frac{dsale}{dt} = 20\pi h\frac{dh}{dt} - \pi h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 1.1 - 2.5 = (20-h)\pi h\frac{dh}{dt}$$

$$-1.4 = (20-h)\pi h\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{-1.4}{(20-h)\pi h} = \frac{dh}{dt}$$

- ✓ Si analizamos, esta expresión es negativa para todo h ∈ [0; 10].
- ✓ Luego, siempre disminuye la profundidad del agua en el lavadero.

Problema N°01 - b) ¿A razón de cuánto cambia la profundidad del agua h en el instante en el que esta profundidad es de 5 metros?

Solución

Datos:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-1.4}{(20-\text{h})\text{h}\pi}$$

Evaluamos para h=5m, obteniendo:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-1.4}{(20-5)5*\pi}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-1.4}{(20-5)5*\pi}$$

$$\frac{dh}{dt} = 0{,}006\ m/\text{min}$$

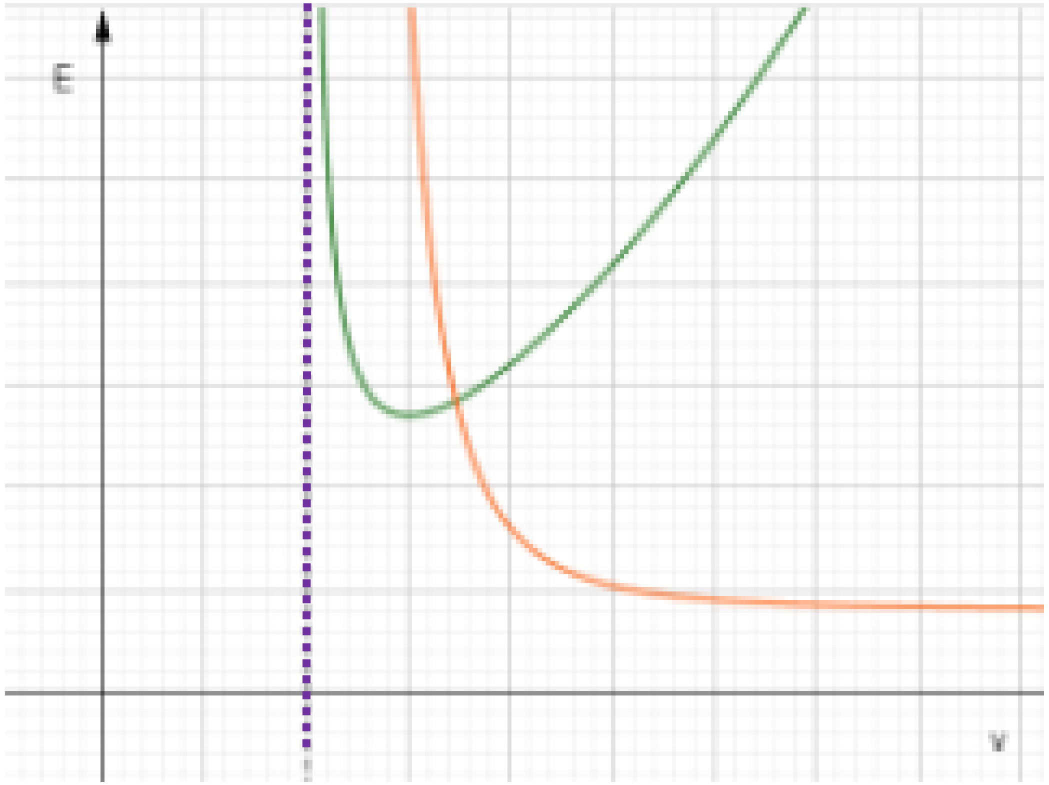
- ✓ La profundidad cambia a razón de 0,006m por cada minuto.

Problema N°02

Se ha estudiado que ciertos animales (peces, aves, etc) efectúan sus desplazamientos tratando de minimizar su gasto de energía. Sea un tipo de peces migratorios que nadan a contracorriente. Si v es la velocidad del pez respecto de la corriente, $\boldsymbol{u}$ velocidad de la corriente (considere esta constante), se cumple que $u < v$.
La energía (E) que dichos peces necesitan para nadar una distancia determinada (d) es directamente proporcional a la velocidad al cubo por dicha distancia e inversamente proporcional a la diferencia de la velocidad del pez y la corriente.

a) (4 puntos) Encuentra el valor de v que hace mínima la energía E, para una distancia d conocida.

b) (2 puntos) En la gráfica se muestra el bosquejo de dos de estas funciones: E(v), E'(v) y E''(v) para $v > u$. Identifique cada una, argumente su respuesta.



c) (2 punto) Bosqueje la gráfica de la función faltante.

d) (2 puntos) ¿Con qué rapidez cambia la variación de la energía respecto a la velocidad si la velocidad del pez alcanza el doble de la velocidad de la corriente? Interprete el resultado en el contexto del problema.

Problema N°02 - a) Encuentra el valor de v que hace mínima la energía E, para una distancia d conocida.

Solución

Datos:

La energía (E) que dichos peces necesitan para nadar una distancia determinada (d) es directamente proporcional a la velocidad al cubo por dicha distancia e inversamente proporcional a la diferencia de la velocidad del pez y la corriente.

Modelo: $$\boldsymbol{E(v) = \frac{kv^3 d}{v-u}}$$

Para una distancia d fija, empleamos el criterio de la primera derivada para extremos de una función tal que:

$$E'(v) = \frac{dE}{dv} = \boldsymbol{kd\frac{3v^2(v-u)-v^3}{(v-u)^2}}$$

$$E'(v) = \boldsymbol{kd\frac{3v^3-3v^2u-v^3}{(v-u)^2}}$$

$$E'(v) = \boldsymbol{kd\frac{2v^3-3v^2u}{(v-u)^2} = 0}$$

$$\boldsymbol{v^2(2v-3u) = 0}$$

$$\rightarrow v_1 = 0; v_2 = \frac{3}{2}u$$

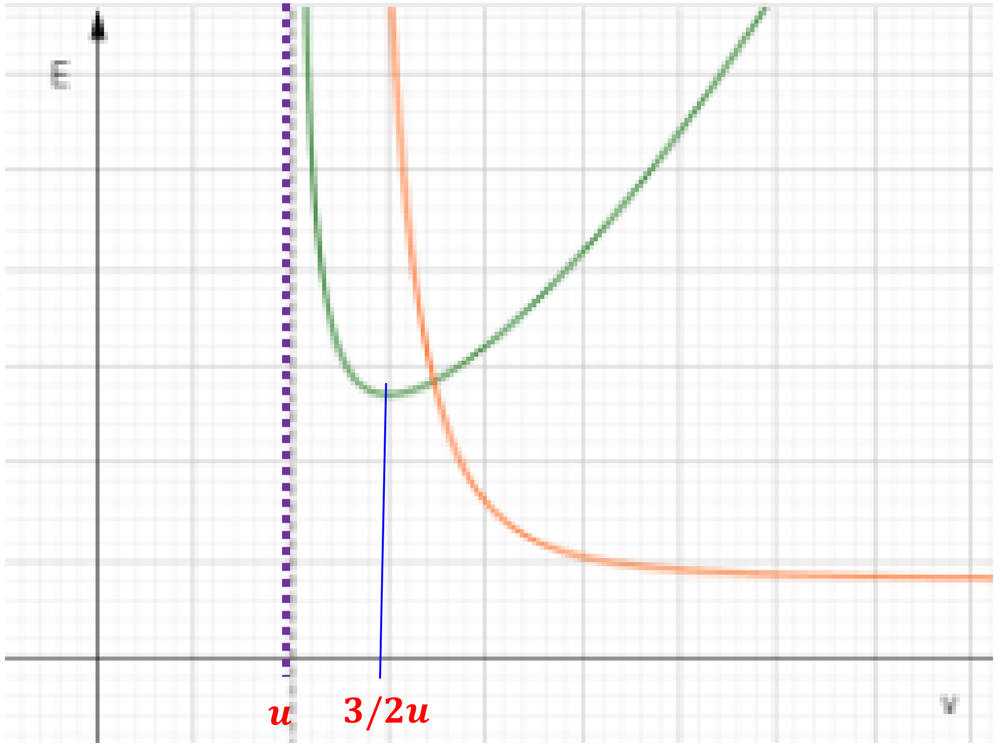
El valor que minimiza la energía E es cuando $v_2 = \frac{3}{2}u$.

Problema N°02 - b) En la gráfica se muestra el bosquejo de dos de estas funciones: E(v), E'(v) y E''(v) para $v > u$. Identifique cada una, argumente su respuesta.

Solución

Datos:

$$E(v) = \frac{kv^3 d}{v-u} \qquad E'(v) = kd\frac{3v^2(v-u) - v^3}{(v-u)^2}$$



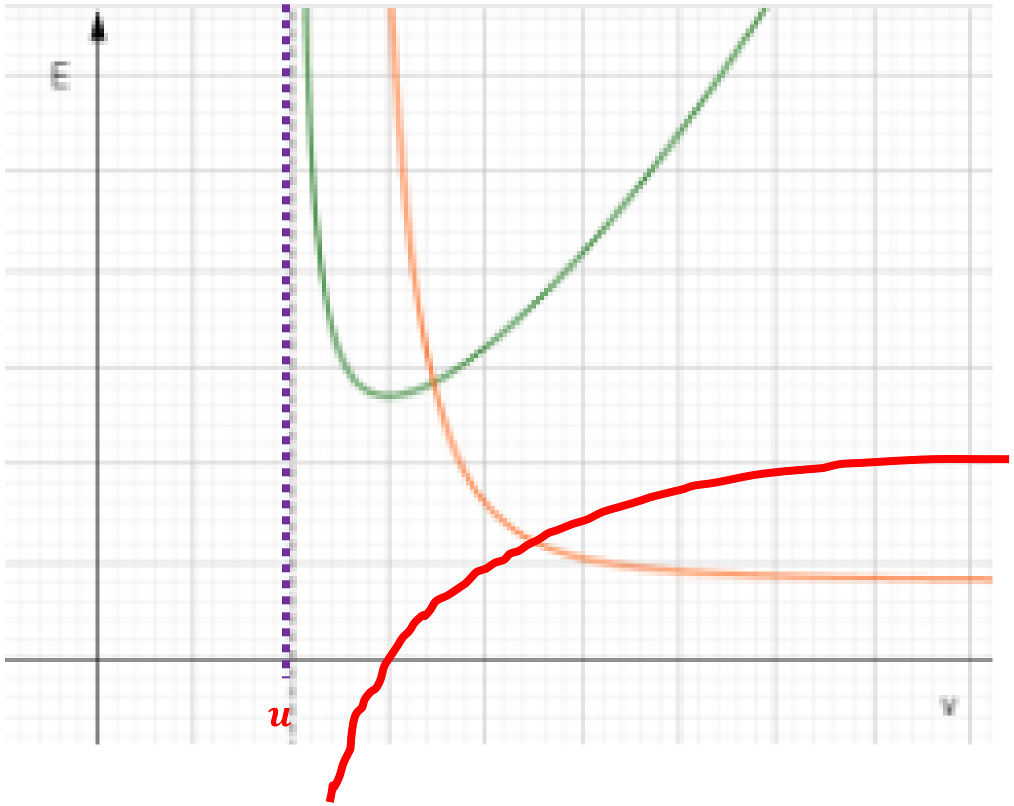
La grafica **verde** es la función **E(v)** puesto que presenta asíntota en $v = u$ y mínimo en $v = 3/2u$. La gráfica **naranja** es **E''(v)** puesto que E(v) es cóncava hacia arriba.

Problema N°02 - c) Bosqueje la gráfica de la función faltante.

Solución

Datos:

$$E(v) = \frac{kv^3 d}{v-u} \qquad E'(v) = kd\frac{3v^2(v-u) - v^3}{(v-u)^2}$$



Por lo tanto la gráfica ausente es E’(v),

Problema N°02 - d)) ¿Con qué rapidez cambia la variación de la energía respecto a la velocidad si la velocidad del pez alcanza el doble de la velocidad de la corriente? Interprete el resultado en el contexto del problema.

Solución

Datos:

$$Si\ v = 2u\ entonces: \quad E''(v) = \boldsymbol{kd}\frac{\boldsymbol{(6v^2 - 6vu)(v-u)^2 - 2(v-u)(2v^3 - 3v^2u)}}{\boldsymbol{(v-u)^4}}$$

$$Simplificamos: \quad E''(v) = \boldsymbol{kd}\frac{\boldsymbol{(6v^2 - 6vu)(v-u) - 2(2v^3 - 3v^2u)}}{\boldsymbol{(v-u)^3}}$$

$$Evaluamos\ tal\ que: \quad E''(2u) = \boldsymbol{kd}\frac{\boldsymbol{\left(24u^2 - 12u^2\right)u - (8u^3)}}{\boldsymbol{(u)^3}}$$

$$E''(2u) = \boldsymbol{kd}\frac{\boldsymbol{\left(12u^3 - 8u^3\right)}}{\boldsymbol{(u)^3}} = \boldsymbol{4kd}$$

La tasa con la que cambia la variación de energía respecto a la velocidad de desplazamiento de los peces es dada por 4 veces la constante de proporcionalidad por la distancia recorrida.

www.utec.edu.pe

www.ce2a.utec.edu.pe