UTEC

UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA

# MATEMÁTICAS I - SEMANA 9


**Docentes:**
**Xyoby Chávez Pacheco**
**Sergio Quispe Rodríguez**
**Cristina Navarro Flores**
**Naudy López Rodríguez**
**Patricia Reynoso Quispe**
**Cordelia Khouri de Arciniegas**

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA


# Pautas de la sesión:

- Tiempo aproximado 2 hora
- Realizar preguntas por el chat.
- Silenciar su micrófono.
- Indicar el momento de preguntas
- Habilitar la cámara.
- La grabación de la sesión se cargará a Canvas.

# Logro R1

Definir y calcular integrales indefinidas mediante diversos métodos (sustitución, partes, sustitución trigonométrica, fracciones parciales)

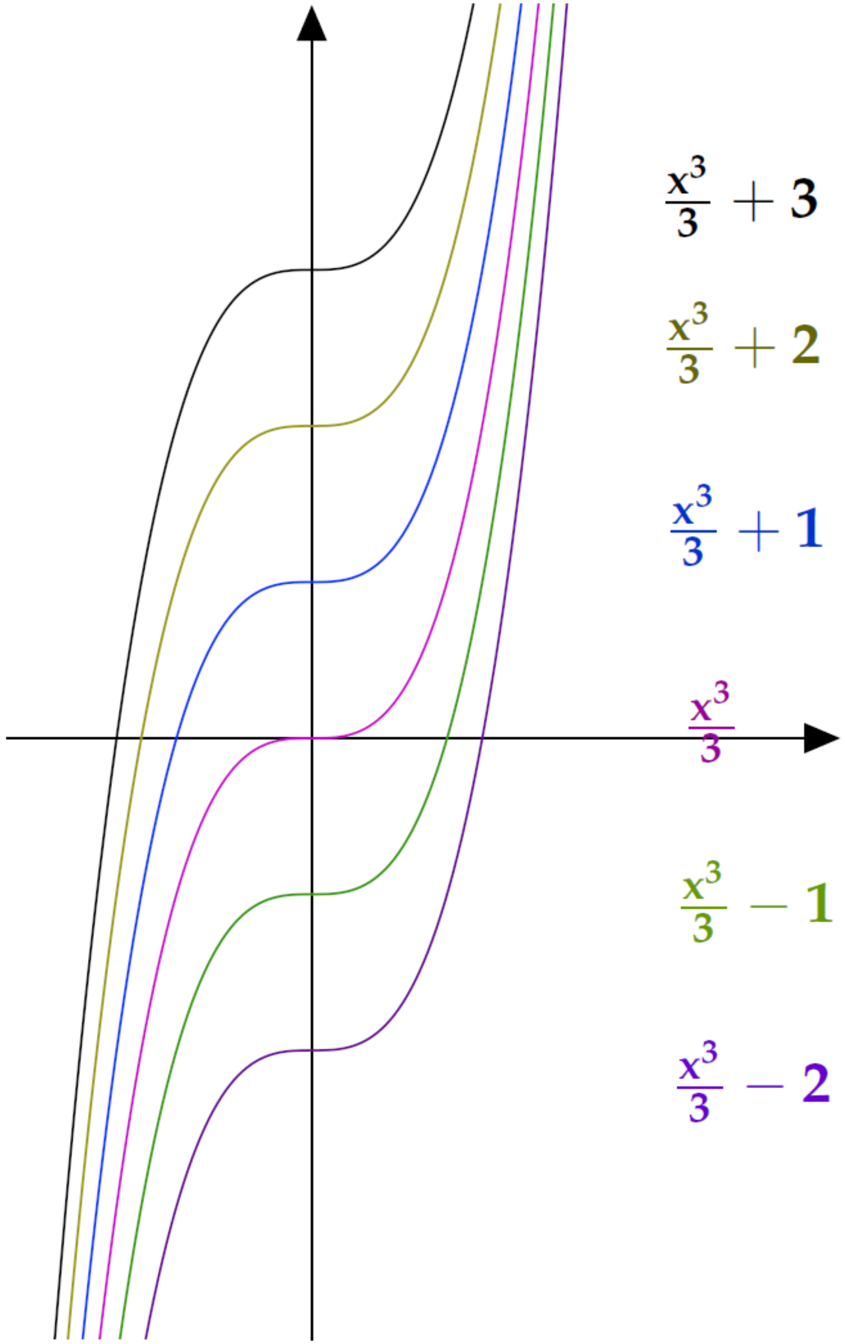
# Antiderivada

Definición: Una función $F$ recibe el nombre de antiderivada de $f$ en un intervalo $I$ si:

$$F'(x) = f(x) \ \forall x \in I$$

# Ejemplo:

Calcular la antiderivada de $f(x) = x^2$



## Teorema:

Una función $F$ es una antiderivada de $f$ en un intervalo $I$,

entonces la antiderivada mas general de $f$ en $I$ es :

$$F(x) + C \text{ , donde } C \text{ es una constante arbitraria}$$

Es decir:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x)$$

## Antiderivada

| | |
|---|---|
| $cf(x)$ | $cF(x)$ |
| $f(x)+g(x)$ | $F(x)+G(x)$ |
| $x^n\ , n\neq -1$ | $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $ln\lvert x\rvert$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $\cos(x)$ | $sen(x)$ |

## Antiderivada

| | |
|---|---|
| $sen(x)$ | $-\cos(x)$ |
| $sec^2x$ | $\tan x$ |
| $\sec x\tan x$ | $\sec x$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $sen^{-1}x$ |
| $\dfrac{1}{1+x^2}$ | $tan^{-1}x$ |

# Regla de sustitución

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable cuyo rango es un intervalo $I$ y $f$ es una función continua entonces:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \quad donde \quad u = g(x)$$

## Ejemplo: Resolver $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$

## Veamos:

$Haciendo: \; u = x^2 + 1$ Notando que $du = 2xdx$

$$En\ la\ integral: \; I = \int u^{1/2}du = \frac{u^{3/2}}{3/2}$$

$$= \frac{(x^2+1)^{3/2}}{3/2} + \mathrm{C}$$

## Ejemplo

Calcular

1. $\int \sqrt{2x+1}dx$
2. $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x}}dx$
3. $\int e^{5x}dx$
4. $\int \sqrt{1+x^2}x^4dx$
5. $\int tan\,x\,dx$

# Integración por partes

Denotando $u = f(x)$ y $v = g(x)$ entonces los diferenciales son

$du = f'(x)dx$ y $dv = g'(x)dx$ por la regla de sustitución:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Ejemplo: Determinar $\int xsen(x)dx$

Veamos:

$$Haciendo: \; du = sen\, xdx \;\; \Rightarrow \;\; u = -\cos x$$

$$Haciendo: \; v = x \;\; \Rightarrow \;\; dv = dx$$

$$\int xsen(x)dx = \; uv - \int udv \; = -xcosx - \int -cos(x)dx = -xcosx + sen\, x$$

**Ejercicio 01:** Integrar: $\int 8x(4x^2-3)^5dx$

## Solución

Se hace un cambio de variable: $u = 4x^2 - 3$ por lo que $du = 8xdx$

Sustituyendo en la integral dada se tiene:

$$\int 8\mathrm{x}(4x^2-3)^5\mathrm{dx} = \int (4x^2-3)^5\,(8xdx)$$

$$= \int u^5dx$$

$$= \frac{1}{6}u^6 + C$$

$$= \frac{1}{6}(4x^2-3)^6 + C$$

# Ejercicio 02: Integrar $\displaystyle\int \frac{3x+6}{\sqrt{2x^2+8x+3}}\,dx$

## Solución:

Sustituyendo: $u = 2x^2 + 8x + 3$ con $du = (4x+8)dx$

Observe que: $(3x+6)dx = 3(x+2)dx = \frac{3}{4}(4)[(x+2)dx] = \frac{3}{4}[(4x+8)dx] = \frac{3}{4}du$

En la integral dada se tiene:

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+6}{\sqrt{2x^2+8x+3}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{2x^2+8x+3}}[(3x+6)dx] \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{u}}\left(\frac{3}{4}du\right) = \frac{3}{4}\int u^{-1/2}du \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{u^{1/2}}{1/2}\right) + C = \frac{3}{2}\sqrt{u} + C \\
&= \frac{3}{2}\sqrt{2x^2+8x+3} + C
\end{aligned}$$

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

# **Ejercicio 03:** Determinar: $\int x^2 \ln(x)dx$

## Solución:

Elija las funciones $u$ y $v$ de modo que $\int vdu$ sea más fácil de evaluar que $\int udv$. Así:

$$u = \ln(x) \qquad dv = x^2dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{1}{3}x^3$$

$$\int x^2\ln(x)dx = \int \overbrace{(ln(x))}^{\boldsymbol{u}}\overbrace{x^2dx}^{\boldsymbol{dv}} = \overbrace{ln(x)}^{\boldsymbol{u}}\overbrace{\frac{1}{3}x^3}^{\boldsymbol{v}} - \int \overbrace{\frac{1}{3}x^3}^{\boldsymbol{v}}\overbrace{\frac{1}{x}dx}^{\boldsymbol{du}}$$

$$= \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{3}\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^3\right) + C$$

$$= \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + C$$

# Ejercicio 04: Integrar: $\int xe^{2x}dx$

## Solución

Eligiendo apropiadamente las funciones $u$ y $v$ se tiene:

$$u = x \qquad dv = e^{2x}dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\begin{aligned}
\int xe^{2x}dx &= \int \overbrace{x}^{\boldsymbol{u}}\,\overbrace{e^{2x}dx}^{\boldsymbol{dv}} = \overbrace{x}^{\boldsymbol{u}}\,\overbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}^{\boldsymbol{v}} - \int \overbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}^{\boldsymbol{v}}\,\overbrace{dx}^{\boldsymbol{du}} \\
&= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} + C
\end{aligned}$$

www.utec.edu.pe

www.ce2a.utec.edu.pe